

# Bestimmung von Messunsicherheiten mittels Bootstrapping in der Formanalyse

Michael Lösler, Cornelia Eschelbach und Rüdiger Haas

## Zusammenfassung

In den messenden Disziplinen gehören die statistischen Methoden des Leitfadens zur Angabe der Unsicherheit beim Messen wie beispielsweise das Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz oder die der Monte-Carlo-Simulation zu den verbreitetsten für das Ableiten von Messunsicherheiten. Die Anwendung dieser Methoden setzt voraus, dass die statistische Verteilung der erhobenen Stichprobe bekannt ist. Dies kann in der Praxis nicht immer vollständig erfüllt werden. In der deskriptiven Statistik sind Verfahren zum Ermitteln von Unsicherheiten bekannt, die keine Kenntnis bzgl. der statistischen Verteilung der Beobachtungen voraussetzen. Zu diesen Verfahren zählt das Bootstrapping. In diesem Beitrag wird das Bootstrapping für die Bestimmung der Konfidenzbereiche der Formparameter eines allgemeinen elliptischen Ring-Focus-Paraboloids im Rahmen der Formanalyse demonstriert. Zur Ableitung der Überdeckungswahrscheinlichkeit wird die statistische Verteilung der Parameter mittels Kerndichteschätzung approximiert und ein Konfidenzbereich sowohl für die Formparameter als auch für die resultierende Brennfläche angegeben.

## Summary

*The methods of the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, e.g. law of propagation of uncertainty or Monte-Carlo simulations, are the most applied guidelines in the framework of measurement sciences. These methods require a-priori knowledge of the statistical distribution of the taken sample. However, in some practical cases, this condition cannot be fulfilled. In descriptive statistics, analysis methods are known that do not require knowledge of the underlying distribution of the data. One well-known algorithm is the bootstrapping. In this contribution, the bootstrap algorithm is applied to the surface analysis to derive confidence intervals of estimated parameters, exemplified by the adjustment of an elliptic ring-focus paraboloid. Introducing kernel density estimation, the unknown probability density functions of the estimates are approximated and transformed to the resulting focal area to derive the level of confidence of the intervals.*

**Schlüsselwörter:** Unsicherheiten, Bootstrap, Kerndichteschätzung, Formanalyse, Ring-Focus-Paraboloid

## 1 Einleitung

Das Erfassen und Bewerten von Objektgeometrien im Kontext der Formanalyse ist eine Kernaufgabe in der industriellen Messtechnik. Die Erfassung kann hierbei in Abhängigkeit der Objektdimensionen und der Ge-

nauigkeitsanforderungen taktil oder berührungslos mit Koordinatenmessmaschinen, Lasertrackern oder photogrammetrischen Methoden erfolgen. Lässt sich die erfasste Oberfläche nicht durch eine geschlossene Funktion darstellen, so bieten sich Modellierungen mittels Dreiecksvermaschung oder die Verwendung von stückweisen polynomialem Funktionen als Ersatzfunktionen an (z.B. Harmening und Neuner 2016). Basiert das erfasste Objekt hingegen auf einer einfachen Regelgeometrie oder einer Kombination einfacher Regelgeometrien mit festen geometrischen Eigenschaften, so ist es zweckdienlich, diese Kenngrößen unter Verwendung der entsprechenden Regelgeometrie direkt zu bestimmen (z.B. Ahn 2005). Unter Umständen kann es sinnvoll sein, die Sollgeometrie, z.B. einen Kreis, zugunsten einer komplexeren Parametrierung, z.B. einer Ellipse, aufzugeben, sofern die zusätzlichen Modellparameter geometrisch interpretierbar bleiben und mit der Sollgeometrie in Bezug zueinander gesetzt werden können. Die Bewertung der ermittelten Kenngrößen erfolgt i.d.R. unter Berücksichtigung des zugehörigen Vertrauens- bzw. Konfidenzbereiches z.B. durch einen Hypothesentest. Diese Vertrauensbereiche können u.a. Vielfache der Messunsicherheit sein und kennzeichnen die Streuung der Werte einer Messgröße mit einer angegebenen Überdeckungswahrscheinlichkeit und basieren auf der Grundlage der benutzten Informationen (Brinkmann 2012, S. 39). Eine Änderung des Größenwertes einer Messgröße zieht somit auch eine Änderung der Messunsicherheit nach sich, insbesondere wenn zur Ermittlung andere Bestimmungsmodelle zugrunde gelegt werden. Diese Vielfalt der Bestimmungsmethoden kann u.U. unerwünscht sein, wenn es z.B. um Vergleichbarkeiten von Messinstrumenten geht (z.B. Hennes 2007).

Sowohl die Definition der Messunsicherheit als auch ihre Bestimmungsmethoden sind einem ständigen Veränderungsprozess unterworfen, sodass das Ermitteln von Mess- oder Parameterunsicherheiten keinem deterministischen Schema folgt und, wie Krystek (2012, S. 33) anmerkt, in gewisser Hinsicht willkürlich ist. Entscheidend ist vielmehr, dass die angewandte Methodik transparent und nachvollziehbar ist und von allen Beteiligten akzeptiert wird. Insbesondere in interdisziplinären Projekten ist eine einheitliche Notation und Fachterminologie wünschenswert. Für die messenden Disziplinen liegt mit dem *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM) eine solche fachübergreifende Normierung vor (JCGM100 2008). Diese kann, insbesondere durch die zweite Ergänzung mit der Erweiterung auf beliebig viele Ausgangsparameter (JCGM102 2011), auf praktisch alle messtechnischen Problemstellungen, z.B. Bündel-

ausgleichung, Formanalyse oder Koordinatentransformation, angewandt werden.

In der Formanalyse können die auftretenden Unsicherheiten unterteilt werden in Objektunsicherheiten wie beispielsweise Formabweichung oder Oberflächenrauheit, thermisch bedingte Unsicherheiten und in Unsicherheiten, die dem Messsystem bzw. dem Aufnahmeverfahren zugeschrieben werden können, vgl. DIN EN ISO 15530-3 (2016). Für die meisten Aufnahmesysteme liegen gute Kenntnisse bzgl. der auftretenden Messunsicherheiten vor, da diese i. A. problemunspezifisch sind und sich durch Labormessungen oder Ringversuche modellieren und ermitteln lassen. Thermische Unsicherheiten lassen sich mit Kenntnis der Objektdimension, der verwendeten Materialien und einer repräsentativen Erfassung der Objekttemperatur abschätzen. Die Quantifizierung von Objektunsicherheiten erfordert hingegen eine problembezogene Analyse des zu messenden Einzelobjektes. Die hier genannten Unsicherheiten lassen sich selbstverständlich feiner granulieren und besitzen nicht alle denselben Anteil am Unsicherheitsbudget. Sie überlagern sich während der messtechnischen Erfassung des Objektes und sind somit in der diskreten Realisierung der Stichprobe  $\mathbf{I}$  enthalten. Die realisierten Beobachtungen  $l_1, l_2, \dots, l_n$  entsprechen dem zufälligen Ziehen aus einer i. d. R. unbekannten Verteilungsfunktion  $F$ . Um die Parameterunsicherheiten entsprechend des GUM mittels Unsicherheitsfortpflanzung oder Monte-Carlo-Simulation abzuschätzen, muss a-priori über  $F$  in geeigneter Form verfügt werden (vgl. JCGM101 2008, JCGM102 2011).

In der deskriptiven Statistik sind weitere Verfahren bekannt, die weder einen (hinreichend) linearen Zusammenhang noch eine konkrete Spezifizierung von  $F$  erfordern. Der Bootstrap-Algorithmus (auch Bootstrapping) ist eines der bekanntesten, numerischen Verfahren, welches keine Spezifizierung von  $F$  erfordert. Dieses Verfahren soll im Folgenden näher beschrieben werden und zur Ableitung von Parameterunsicherheiten in der Formanalyse am Beispiel der Schätzung eines Ring-Focus-Paraboloids angewandt werden. Durch Kombination des Bootstrap-Algorithmus mit der Kerndichteschätzung werden die resultierenden Konfidenzbereiche abgeschätzt.

## 2 Methodik zur Bestimmung von Unsicherheiten

Am Beispiel der Schätzung eines Ring-Focus-Paraboloids eines VLBI-Radioteleskops sollen im Folgenden die Unsicherheiten der geschätzten Parameter mittels Bootstrap-Verfahren approximiert und auf die resultierende Brennfläche übertragen werden. Zur Bestimmung der Konfidenzbereiche der geschätzten Parameter und der Brennfläche wird, da a-priori keine multivariate Normalverteilung der Beobachtungen unterstellt werden soll, eine Kerndichteschätzung verwendet.

### 2.1 Bootstrap

Das Bootstrap-Verfahren ist ein numerisches Verfahren, welches auf dem Prinzip der Stichprobenwiederholung (Resampling) beruht, d. h. dem »Ziehen mit Zurücklegen«. Es kann als eine verallgemeinerte Form des Jackknife-Verfahrens betrachtet werden und wurde erstmals von Efron (1979) beschrieben. Der Name des Verfahrens bedeutet sinngemäß so viel wie: »an den eigenen Haaren aus dem Sumpf ziehen« und ist eine Anspielung auf die Geschichte vom Baron Münchhausen (Engel und Grübel 2008). Die gesuchten Statistiken  $\boldsymbol{\theta}$ , z. B. Schätzwerte  $\hat{\mathbf{x}}$  und Dispersionen  $\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}}$ , von Größenwerten werden durch das Resampling der Ausgangsstichprobe ermittelt. Die theoretische aber unbekannte Verteilung  $F$  wird beim hier betrachteten nicht-parametrischen Bootstrapping durch die empirische Verteilung  $\hat{F}$  der Stichprobe ersetzt. Anstelle von

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}(\mathbf{I}_F) \quad (1)$$

wird

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}(\mathbf{I}_{\hat{F}}) \quad (2)$$

approximiert, was auch als Plug-In-Prinzip bezeichnet wird (vgl. Efron und Tibshirani 1994, Kap. 4.3).

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \ell^1 \rightarrow \mathbf{x}^1 = \mathbf{f}(\ell^1) \\ \ell^2 \rightarrow \mathbf{x}^2 = \mathbf{f}(\ell^2) \\ \vdots \\ \ell^j \rightarrow \mathbf{x}^j = \mathbf{f}(\ell^j) \\ \vdots \\ \ell^m \rightarrow \mathbf{x}^m = \mathbf{f}(\ell^m) \end{array} \right\} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \{\hat{\mathbf{x}}, \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}}\}$$

Abb. 1: Prinzip des Bootstrap-Algorithmus zur Schätzung der Statistiken  $\boldsymbol{\theta}$  durch Resampling einer Stichprobe  $\mathbf{I}$

Abb. 1 zeigt schematisch das Prinzip des Bootstrap-Algorithmus. Die Ausgangsstichprobe  $\mathbf{I}$ , die mit einem Stichprobenumfang von  $n$  vorliegt, wird  $m$ -fach nach dem Prinzip »Ziehen mit Zurücklegen« zufällig gesampelt, sodass jedes Bootstrap-Sample  $\ell^j$  eine Unterstichprobe von  $\mathbf{I}$  ist, die wiederum einen Umfang von  $n$  besitzt. Aus jeder Unterstichprobe werden die gesuchten Zielparameter  $\mathbf{x}^j = \mathbf{f}(\ell^j)$  bestimmt. Basierend auf dieser  $m$ -fachen Wiederholung ergibt sich für die Statistik  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \{\hat{\mathbf{x}}, \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}}\}$

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{x}^j \quad (3)$$

bzw.

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\mathbf{x}^j - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x}^j - \hat{\mathbf{x}})^T. \quad (4)$$

Das Bootstrapping besitzt somit große Ähnlichkeiten zur Monte-Carlo-Methode. Der wesentliche Unterschied liegt in der Generierung der Unterstichproben. Während bei der Monte-Carlo-Simulation die Unterstichproben mithilfe einer vorzugebenden bzw. bekannten Verteilungsfunktion  $F$  generiert werden, erfolgt die Generierung der zufälligen Bootstrap-Samples auf Basis der empirischen Verteilung  $\hat{F}$  der Ausgangsstichprobe.

Mit Gl. (3) bzw. Gl. (4) lässt sich ein erweiterter Konfidenzbereich

$$\Pr\left\{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \leq k^2\right\} = 1 - \alpha \quad (5)$$

bestimmen, worin  $k$  eine Konstante ist, sodass das Hypervolumen des gebildeten Intervalls die geforderte  $(1 - \alpha)\%$  Wahrscheinlichkeit der Verteilung besitzt (vgl. JCGM:102 2011). Für  $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{x}}})$  ergibt sich  $k$  bekanntermaßen aus der  $\chi^2$ -Verteilung

$$k^2 = \chi^2_{d,1-\alpha} \quad (6)$$

mit dem Freiheitsgrad  $d$ . Für  $d = 1, 2, 3$  reduziert sich das Hyperkonfidenzellipsoid zu einem Konfidenzintervall, einer Konfidenzellipse bzw. einem Konfidenzellipsoid, sodass dieses leicht visualisiert und interpretiert werden kann. Ist die Bedingung  $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{x}}})$  nicht erfüllt, so stellt Gl. (6) lediglich eine Approximation dar.

## 2.2 Kerndichteschätzung

Ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Daten nicht bekannt bzw. folgt diese keiner bekannten Dichtefunktion, so lässt sich diese mittels Kerndichteschätzung approximieren. Hierzu erfolgt eine Akkumulierung von individuellen Dichtefunktionen, den sogenannten Kernen, deren Positionen durch  $\mathbf{x}$  vorgegeben sind (z.B. Wand und Jones 1995, Kap. 2.2). Abb. 2 zeigt für sechs gleichgenaue, normalverteilte Stichproben die individuellen Kerne sowie die resultierende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Aus dieser Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion kann auf die kumulative Verteilungsfunktion zurückgeschlossen und gewünschte Konfidenzbereiche abgeleitet werden (vgl. Efron und Tibshirani 1994, S. 227 ff.).

Die Kerndichteschätzung ist gegeben durch

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m K_H(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j). \quad (7)$$

Hierin beschreibt  $\mathbf{x}_j$  einen  $d \times 1$  Vektor der  $m$ -fachen Stichprobe,  $\mathbf{H}$  eine symmetrische und positiv-definitive Bandbreitenmatrix und

$$K_H(\mathbf{x}) = |\mathbf{H}|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K}\left(\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}\right) \quad (8)$$

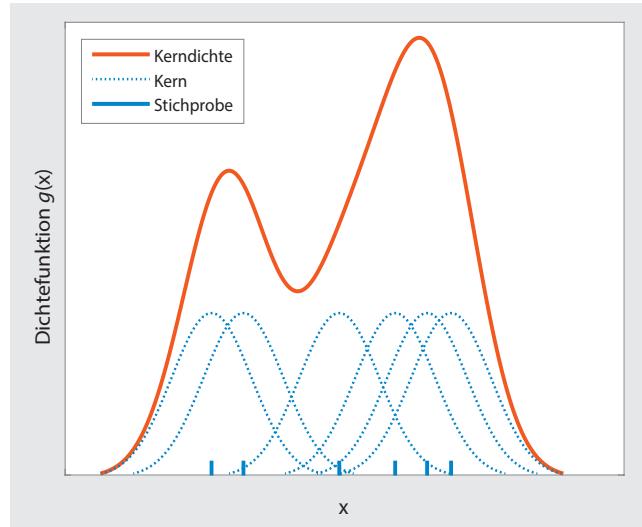


Abb. 2: Schematische Darstellung der Kerndichteschätzung. Die resultierende Kerndichteschätzung (orange) ergibt sich durch Akkumulation der sechs individuellen Kerne (blau gestrichelt) der Stichproben (blau).

den skalierten Kern (vgl. Silverman 1986, Kap. 4.2; Wand und Jones 1995, Kap. 4.2). Die Funktion  $\mathbf{K}$  ist ein beliebiger Kern, der die Eigenschaften der Normiertheit und der Nichtnegativität erfüllt. Üblicherweise werden für  $\mathbf{K}$  zusätzlich auch Symmetrie und Unimodalität gefordert (z. B. Duller 2008, Kap. 10.1.2), die u.a. vom Gaußkern  $K_H(\mathbf{x}) \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{x}}})$  mit

$$K_H(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{x}}}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \mathbf{x}\right) \quad (9)$$

erfüllt werden.

Durch Substitution von Gl. (9) in Gl. (7) ergibt sich der Kerndichteschätzer mit multivariatem Gaußkern

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{m(2\pi)^{d/2} |\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{x}}}|^{1/2}} \sum_{j=1}^m \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^T \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)\right). \quad (10)$$

In der Praxis wird die Bandbreite  $h$  von der Orientierung  $\mathbf{G}$  i.d.R. getrennt betrachtet. Mit der Zerlegung  $\mathbf{G} = h^2 \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{x}}}$ , mit  $|\mathbf{G}| = 1$ , ergibt sich die zu Gl. (10) äquivalente Darstellung (vgl. Scott 2015, Kap. 6.3.2)

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{m(2\pi)^{d/2} h^d} \sum_{j=1}^m \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{h}\right)^T \mathbf{G}^{-1} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{h}\right)\right). \quad (11)$$

Die Bandbreite  $h$  beeinflusst die Glättung der Kerndichteschätzung und ist mit der Klassenbreite in einem Histogramm vergleichbar. Während ein zu kleines  $h$  zu einer Modellierung lokaler Extremstellen führt, überglättet ein zu großes  $h$  den Verlauf der geschätzten Dichtefunktion (z.B. Wand und Jones 1995, S. 13 f.; Nedden 2012, S. 122).

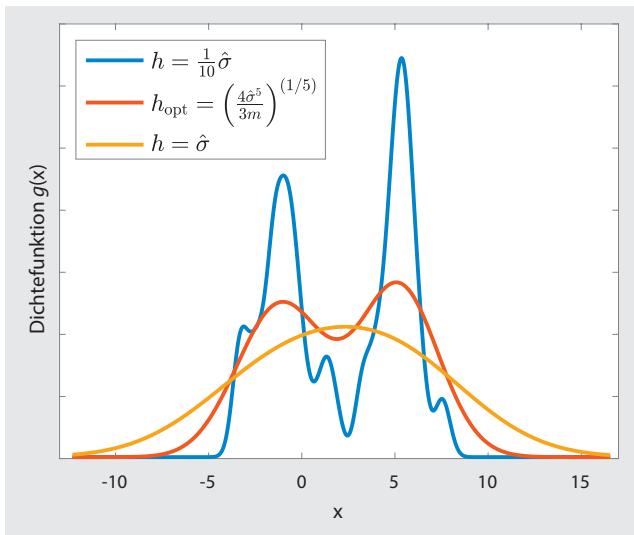


Abb. 3: Verlauf der geschätzten Dichtefunktion für unterschiedlich gewählte Bandbreiten  $h$

Die optimale Bandbreite  $h_{\text{opt}}$  für den Gaußkern kann für normalverteilte Daten und  $d = 1$  aus der Silverman-Regel abgeschätzt werden (Silverman 1986, Kap. 3.4.2)

$$h_{\text{opt}} = \hat{\sigma} \left( \frac{4}{3m} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad (12)$$

worin  $\hat{\sigma}$  die empirische Standardabweichung der Stichprobe ist.

Abb. 3 zeigt den Verlauf geschätzter Dichtefunktionen mit unterschiedlich gewählten Bandbreiten  $h$  für eine fiktive Datenreihe  $\mathbf{x}$ , worin die erste Hälfte des Stichprobenumfangs  $\mathbf{x}_{\{1, m/2\}} \sim N(-1, 1)$  und die zweite Hälfte des Stichprobenumfangs  $\mathbf{x}_{\{m/2+1, m\}} \sim N(5, 1)$  verteilt sind. Während

die Kurve für  $h = \frac{1}{10} \hat{\sigma}$  lokale Extremstellen und somit neben dem Signal auch das Rauschen der Daten modelliert, ist für  $h = \hat{\sigma}$  eine deutliche Überglättung zu erkennen.

Die statistische Verteilung der Daten ist i. d. R. nicht bekannt, sodass die Voraussetzung für die Anwendung von Gl. (12) nicht streng erfüllt ist. Die statistische Verteilung der Daten resultiert in der Messtechnik jedoch aus einer Überlagerung der unterschiedlichen Dichtefunktionen der verschiedenen Einflussgrößen. Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes (z. B. Koch 2007, Kap. 2.4.1; Krystek 2012, Kap. 4.20) kann Gl. (12) somit als hinreichende Näherung betrachtet werden (Wand und Jones 1995, S. 61).

Für multivariate Daten ergibt sich aus Gl. (12) mit  $h^2 = |\Sigma_x|^{1/d}$  entsprechend

$$h_{\text{opt}} = h \left( \frac{4}{d+2} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{d+4}} \quad (13)$$

für eine einheitliche Bandbreite und

$$h_{\text{opt}, j} = \hat{\sigma}_j \left( \frac{4}{d+2} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{d+4}} \quad (14)$$

für multivariate Bandbreiten. Der Einfluss des ersten Faktors ist gering, da  $\left( \frac{4}{d+2} \right)^{\frac{1}{d+4}} \approx 1$ , sodass dieser häufig vernachlässigt wird (vgl. Scott 2015, S. 164).

Mit der geschätzten Dichtefunktion  $\mathbf{g}$  kann der gewünschte Konfidenzbereich unmittelbar abgeleitet werden. Hierzu ist die Iso-Hyperfläche zu konstruieren, die  $(1 - \alpha) \%$  der Daten enthält. Die Iso-Hyperfläche vereinfacht sich für  $d = 1, 2, 3$  zu einem (Iso-)Intervall, einer Iso-Konturlinie bzw. einer Iso-Konturfläche (z. B. Hall 1987; Scott 2015, Kap. 1.4).

### 3 Formanalyse von VLBI-Radioteleskopen

In der Formanalyse können die auftretenden Messunsicherheiten, die für die Anwendung des Unsicherheitsfortpflanzungsgesetzes oder der Monte-Carlo-Simulation erforderlich wären (vgl. Franke et al. 2017), nur bedingt spezifiziert werden. Während üblicherweise detaillierte Informationen bzgl. der Unsicherheiten des Aufnahmesystems vorliegen, bereitet das repräsentative Abschätzen von objektbezogenen Unsicherheiten oft Schwierigkeiten. Insbesondere bei Messsystemen mit einem hohen Auflösungsvermögen besitzen die objektspezifischen Unsicherheiten einen dominanten Anteil am gesamten Unsicherheitsbudget des Aufnahmeprozesses und beeinflussen somit primär die abgeleiteten Formparameter (z. B. Lanza und Peters 2010).

Die Anzahl der Formparameter ist bei Verwendung von Regelgeometrien im Verhältnis zur Anzahl der Beobachtungen i. d. R. klein, sodass eine hohe Redundanz vorliegt. Liegen nur unzureichende Informationen bzgl. der a-priori Messunsicherheiten vor, so erlaubt diese hohe Redundanz eine zuverlässige Schätzung der gewünschten Statistiken  $\boldsymbol{\theta}$  mittels Bootstrapping. Im Folgenden wird diese Vorgehensweise auf die Schätzung eines Ring-Focus-Paraboloids eines VLBI-Radioteleskops angewendet, für welches eine photogrammetrische Aufnahme mit übergeordneter Genauigkeit vorliegt. Hierfür wird zunächst ein allgemeines und universelles mathematisches Modell zur geometrischen Beschreibung eines VLBI-Hauptreflektors hergeleitet.

Die Very Long Baseline Interferometry (VLBI) zählt zu den geodätischen Raumtechniken, die globale Daten zur Beschreibung der Erdfigur und ihrer raum-zeitlichen Veränderung liefern. Hierzu werden Radiowellen von extragalaktischen, punktförmigen Radioquellen (Quasaren) in globalen Netzwerken von VLBI-Radioteleskopen registriert. Durch Korrelation der aufgezeichneten Signale lässt sich der Laufzeitunterschied extrahieren und u. a. auf die Entfernung zwischen den Radioteleskopen

zurückschließen und ein weltumspannendes Netz ableiten, welches u. a. die Grundlage für einen erdfesten Referenzrahmen ist (z.B. Altamimi et al. 2016).

Die Empfangseigenschaften eines VLBI-Radioteleskops hängen maßgeblich von der geometrischen Form des Hauptreflektors ab. Diese sind zum einen die Fertigungsqualität, die sich als Abweichung von der Idealform quantifizieren lässt, und zum anderen die geometrische und zeitliche Stabilität. Verformungen des Hauptreflektors entstehen durch Temperaturveränderungen, Insolationen, Schnee- und Windlasten, aber auch das Eigengewicht selbst deformiert den Hauptreflektor z.T. elevationsabhängig. Dieses Deformationsverhalten wird seit den 1980er Jahren eingehend untersucht und seine Auswirkung auf VLBI-Ergebnisse analysiert (z.B. Clark und Thomsen 1988, Artz et al. 2014).

### 3.1 Mathematisches Modell eines Ring-Focus-Paraboloids

Der Hauptreflektor eines konventionellen Radioteleskops entspricht i. d. R. einem gewöhnlichen rotationssymmetrischen Paraboloid. Bedingt durch Konstruktionselemente für den Empfänger bzw. den Subreflektor ergeben sich jedoch Verschattungen, sodass nicht die gesamte Hauptreflektoroberfläche nutzbar ist. Je kleiner der Hauptreflektor ist, desto größer sind diese abschattungsbedingten Signalverluste. Insbesondere die neue Generation von so genannten VGOS<sup>1</sup>-spezifizierten Radioteleskopen besitzt mit einem Reflektordurchmesser von ca. 13 m einen vergleichsweise kleinen Hauptreflektor (vgl. Petrachenko et al. 2009). Um den Einfluss von verschattenden Elementen zu minimieren, besitzen diese Radioteleskope häufig kein rotationssymmetrisches Paraboloiddesign, sondern ein sogenanntes Ring-Focus-Paraboloiddesign. Hierbei handelt es sich um eine Kombination zweier Flächen zweiter Ordnung, bei der die Symmetriechse des Paraboloids durch einen Zylinder ersetzt wird, vgl. Abb. 4. Konstruktionselemente, die sich innerhalb des Zylinders befinden, führen somit nicht mehr zu einer Verschattung des Hauptreflektors (z.B. Cutler 1947).

Ein geschlossenes funktionales Modell zur mathematischen Beschreibung eines elliptischen Ring-Focus-Paraboloids in kanonischer Form geben Lösler et al. (2017) mit

$$a^2(x_i - r_i n_{x,i})^2 + b^2(y_i - r_i n_{y,i})^2 = z_i \quad (15)$$

an. Hierin sind  $a$  und  $b$  die Formparameter der beiden senkrecht zueinander stehenden Parabeln,  $\mathbf{n}_i^T = (n_{x,i} \ n_{y,i} \ 0)$ , mit  $\|\mathbf{n}_i\| = 1$ , ein normierter Richtungsvektor, der den Oberflächenpunkt  $\mathbf{p}_i^T = (x_i \ y_i \ z_i)$  in Richtung der Zylinderachse  $(0 \ 0 \ 1)^T$  um  $r_i$  verschiebt, vgl. Abb. 4, mit

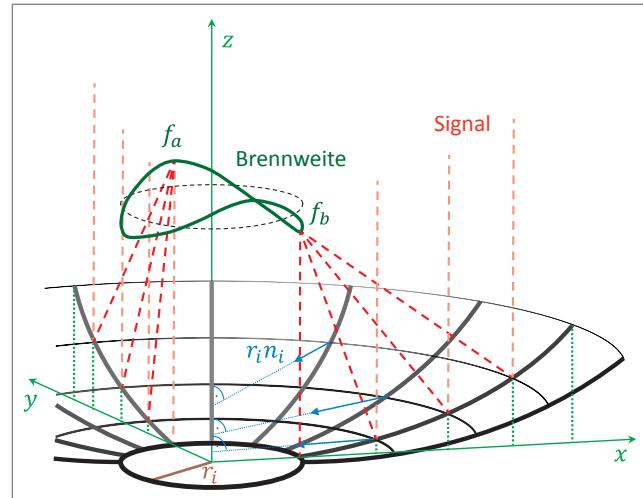


Abb. 4: Schematische Darstellung eines elliptischen Ring-Focus-Paraboloids in kanonischer Form mit Signalverlauf

$$n_{x,i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}, \quad (16)$$

$$n_{y,i} = \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}. \quad (17)$$

Während sich der punktbezogene Abstand

$$r_i = \frac{1}{\sqrt{c^2 m_{x,i}^2 + d^2 m_{y,i}^2}} \quad (18)$$

mit

$$m_{x,i} = n_{x,i} \cos \varphi + n_{y,i} \sin \varphi, \quad (19)$$

$$m_{y,i} = n_{y,i} \cos \varphi - n_{x,i} \sin \varphi \quad (20)$$

für einen Zylinder mit elliptischer Grundfläche in Abhängigkeit der großen und kleinen Ellipsenhalbachse  $c$  bzw.  $d$  und dem Ellipsendrehwinkel  $\varphi$  ergibt (vgl. Lösler und Nitschke 2010), ist dieser bei Verwendung eines Kreiszylinders für alle Punkte identisch

$$r_i = r = c = d = \text{const.} \quad (21)$$

Durch das Quadrieren der Formparameter  $a$  und  $b$  in Gl. (15) ist sichergestellt, dass kein hyperbolisches Ring-Focus-Paraboloid entsteht. Kann dies im konkreten Anwendungsfall ausgeschlossen werden, so kann hierauf verzichtet werden.

Die Brennweiten der beiden senkrecht zueinander stehenden Parabeln ergeben sich aus den Parabelparametern  $a$  und  $b$  zu

$$f_a = \frac{1}{4a^2} \quad (22)$$

bzw.

$$f_b = \frac{1}{4b^2} \quad (23)$$

<sup>1</sup> VLBI Global Observing System

und stellen die Extremstellen der variierenden Brennweite dar.

Die Überführung der kanonischen Form in eine allgemeine Raumlage bzw. in ein übergeordnetes Referenzsystem erfolgt durch Transformation

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{Q}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_0), \quad (24)$$

worin  $\mathbf{P}_0$  der Translationsvektor und  $\mathbf{Q}$  eine Matrix zur Beschreibung der Rotationssequenz sind (z.B. Lösler 2011).

Die Schätzung der fünf datumsinvarianten Formparameter sowie der sechs Orientierungsparameter erfolgt durch eine Ausgleichsrechnung im Gauß-Helmert-Modell oder einer äquivalenten Methode. Durch das Hinzufügen von Parameterrestriktionen kann Gl. (15) vereinfacht werden. Die Grundfläche des Zylinders wird üblicherweise kreisförmig modelliert, sodass  $c = d$  und  $\varphi = 0$  sind. Für  $a = b$  ergibt sich aus dem elliptischen ein rotationssymmetrisches Ring-Focus-Paraboloid, welches in Abhängigkeit von  $c$  und  $d$  eine Brennellipse oder einen Brennkreis mit dem Radius  $r$  besitzt. Für  $r = 0$  verschwindet der integrierte Zylinder und es ergibt sich in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  ein elliptisches oder ein gewöhnliches rotationssymmetrisches Paraboloid. Gl. (15) ist somit sowohl für viele konventionelle VLBI-Radioteleskope als auch für die meisten VGOS-Radioteleskope gültig.

Analog zur gewöhnlichen Parabel, bei der der Abstand jedes Parabelpunktes zum Brennpunkt identisch mit dem Abstand des Parabelpunktes zur sogenannten Leitlinie ist (z.B. Nitschke 2005, S. 120), lässt sich für ein rotationssymmetrisches Paraboloid zeigen, dass der Abstand jedes Paraboloidpunktes zum Brennpunkt identisch mit dem Abstand des Parabelpunktes zur Leitebene ist, vgl. Abb. 5. Für ein symmetrisches Paraboloid bzw. symmetrisches Ring-Focus-Paraboloid ergibt sich aufgrund der einheitlichen Leitebene ein Brennpunkt bzw. Brennkreis.

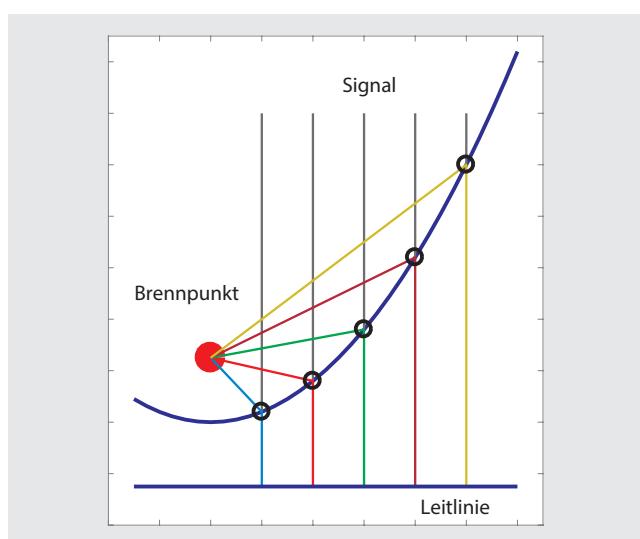


Abb. 5: Schematische Darstellung der Definition des Brennpunktes einer Parabel über die Gleichabständigkeit zur Leitlinie bzw. zum Brennpunkt

Variieren die Brennweiten aufgrund unterschiedlicher Parameter  $a$  und  $b$ , so existiert keine eindeutige Leitebene bzw. keine eindeutige Brennweite, und der Abstand zum Brennpunkt der jeweiligen Schnittparabel variiert in Abhängigkeit des Reflektionspunktes. Im Hinblick auf die Signalverarbeitung ist dieser Laufzeitunterschied unerwünscht. Durch Definition einer einheitlichen Signalauflänge liegt die zugehörige Leitebene jedoch fest. Die resultierende Brennfläche ergibt sich durch Verfolgen aller Signalverläufe bis zur einheitlich gewählten Lauflänge.

### 3.2 Onsala-Twin-Teleskope

Das Onsala Space Observatory ist eine internationale Forschungseinrichtung, die vom Institut für Weltraum-, Geo- und Umweltwissenschaften der Chalmers Technischen Hochschule in Göteborg und dem schwedischen Wissenschaftsrat seit 1949 kooperativ betrieben wird. Das Observatorium befindet sich ca. 40 km südlich von Göteborg und ist die europäische Station mit der längsten Erfahrung in VLBI in Europa (vgl. Haas 2013). Neben zwei konventionellen Radioteleskopen verfügt das Observatorium seit 2017 über zwei baugleiche 13,2 m Zwillingsteleskope mit rotationssymmetrischem Ring-Focus-Hauptreflektordesign, die Onsala Twin Teleskope (vgl. Elgered et al. 2017). Die geplante Brennweite und der Radius betragen  $\tilde{f} = 3,7$  m und  $\tilde{r} = 0,74$  m. Zur Justierung der Reflektorpaneelle und zur Validierung der erreichten Oberflächengenauigkeiten erfolgten 2016 und 2017 baubegleitende photogrammetrische Vermessungen an beiden Hauptreflektoren. Hierzu wurden jeweils  $n = 224$  neuralgische Justierungspositionen als Punkte auf der Oberfläche signalisiert und eingemessen. Die erreichbare Einzelpunktgenauigkeit des verwendeten Messsystems liegt bei  $5 \mu\text{m} + 5 \mu\text{m}/\text{m}$  (persönliche Mitteilung: MT Mechatronics GmbH). Petrachenko et al. (2009) empfiehlt, für VGOS-Radioteleskope eine mittlere Oberflächenabweichung (RMS) von  $200 \mu\text{m}$  nicht zu überschreiten, sodass die alleinige Betrachtung der Messunsicherheit des Aufnahmesystems für eine Formanalyse hier nicht repräsentativ erscheint. Weitere Vorinformationen, die eine sachgerechte Abschätzung der a-priori Messunsicherheiten ermöglichen, liegen jedoch nicht vor, sodass Verfahren wie beispielsweise die Monte-Carlo-Simulation zur Abschätzung der Parameterunsicherheiten hier nicht hypothesenfrei anwendbar sind.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich aufgrund der Ähnlichkeit beider Radioteleskope auf den Datensatz des nördlichen Onsala Twin Teleskops. Eine Voranalyse dieses Datensatzes hat ergeben, dass das funktionale Modell eines rotationssymmetrischen Ring-Focus-Paraboloids mit der Parameterrestriktion  $a = b$  für dieses Radioteleskop zugunsten eines elliptischen Ring-Focus-Paraboloids zu verwerfen ist (Lösler et al. 2018).

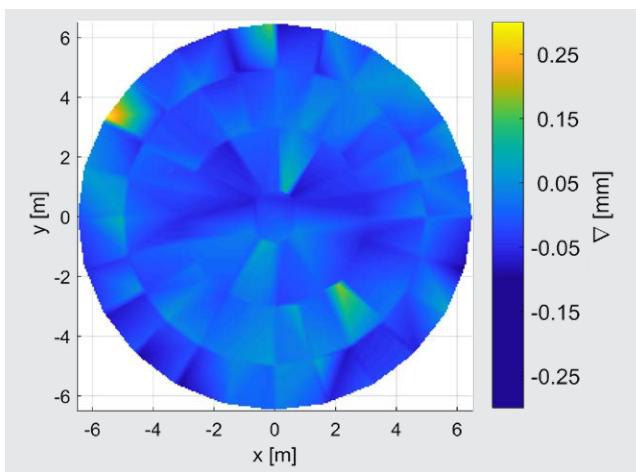


Abb. 6: Räumliche Formabweichungen der 224 gemessenen Punkte von der geschätzten Form eines elliptischen Ring-Focus-Paraboloids. Die Abweichung  $\nabla$  beschreibt hierbei den vorzeichenbehafteten orthogonalen Abstand.

Tab. 1: Datumsinvariante Formparameter  $r$  und die aus  $a$  und  $b$  abgeleiteten Brennweiten  $f_a$  bzw.  $f_b$  für das Modell des elliptischen Ring-Focus-Paraboloids ( $a \neq b$ ), sowie die mittels Bootstrap und Kerndichteschätzung approximierten 95 % Konfidenzintervalle

| Parameter               | $r$              | $f_a$            | $f_b$            |
|-------------------------|------------------|------------------|------------------|
| Größenwert              | 0,7402 m         | 3,6998 m         | 3,6992 m         |
| 95 % Konfidenzintervall | [-0,20; 0,21] mm | [-0,19; 0,18] mm | [-0,19; 0,17] mm |

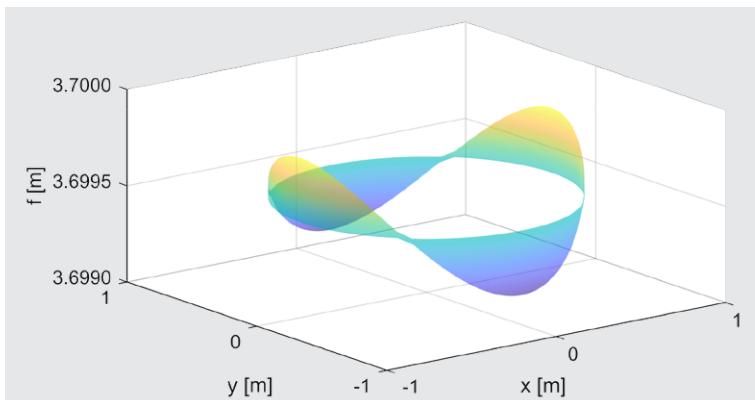


Abb. 7: Resultierende Brennfläche für das Modell eines elliptischen Ring-Focus-Paraboloids bezogen auf die Leitebene der mittleren Brennweite (Darstellung überhöht)

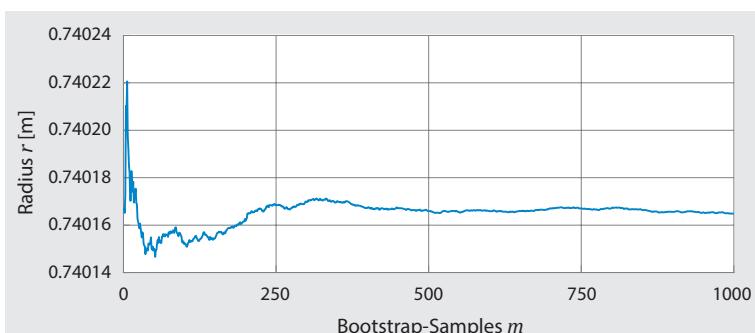


Abb. 8: Geschätzter Radius  $r$  in Abhängigkeit von der Anzahl der Bootstrap-Samples  $m$

Abb. 6 zeigt die räumlichen Formabweichungen zwischen dem geschätzten elliptischen Ring-Focus-Paraboloid und den originären Punktbeobachtungen. Mit einer Ausnahme am linken oberen Rand liegen die Formabweichungen aller Punkte unterhalb von 200  $\mu\text{m}$ . Systematiken in den Residuen sind nicht erkennbar.

Tab. 1 fasst die erzielten Ergebnisse der datumsinvarianten Formparameter zusammen. Die geschätzten Brennweiten  $f_a$  und  $f_b$  weisen eine Differenz von 0,6 mm auf. Die hieraus resultierende Brennfläche ist in Abb. 7 (überhöht) für die Leitebene der mittleren Brennweite  $\frac{1}{2}(f_a + f_b)$  dargestellt.

Um die Unsicherheiten der geschätzten Parameter zu bestimmen, wird auf den Bootstrap-Algorithmus zurückgegriffen und die Konfidenzbereiche werden mittels Kerndichteschätzung approximiert. Abb. 8 zeigt exemplarisch für den Radius  $r$  den Konvergenzfortschritt in Abhängigkeit von der Anzahl der Bootstrap-Samples  $m$ . Die Variationen von  $r$  sind ab  $m > 250$  praktisch vernachlässigbar. Um jedoch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Parameter zuverlässig zu bestimmen, wird eine höhere Anzahl an Bootstrap-Samples empfohlen (Efron und Tibshirani 1994, Kap. 19), sodass  $m = 1.000$  gewählt wird.

Die Konfidenzintervalle in Tab. 1 weisen eine leichte Asymmetrie auf, da die geschätzten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen nur approximativ der Dichtefunktion der Normalverteilung folgen. Für den Radius  $r$  ist exemplarisch die aus der Kerndichteschätzung ermittelte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $g(r)$  in Abb. 9 zusammen mit dem 95 % Konfidenzintervall dargestellt.

Die Brennfläche in Abb. 7 ist eine Funktion der Formparameter  $a$ ,  $b$  und  $r$ , sodass eine getrennte Betrachtung der individuellen Konfidenzbereiche der Formparameter keine Rückschlüsse auf die resultierende Brennfläche liefert. Der  $d = 3$  dimensionale Konfidenzbereich der Formparameter erscheint aufgrund der unterschiedlichen Parameterdimensionen für eine Interpretation ebenfalls ungeeignet. Wird dieser jedoch auf die resultierende Brennfläche übertragen, lässt sich der Konfidenzbereich der Brennfläche durch eine 95 % Iso-Hyperfläche veranschaulichen. Die Iso-Hyperfläche wird wiederum mittels Kerndichteschätzung auf der Basis der Bootstrap-Samples approximiert.

Der 95 % Konfidenzbereich ist in Abb. 10 um die resultierende Brennfläche dargestellt. Die Iso-Hyperfläche bildet keine stetige Oberfläche. Der Oberflächenverlauf wird auch für größere  $m$  nicht glatter, da im Konvergenzpunkt keine detaillierten Informationen – so

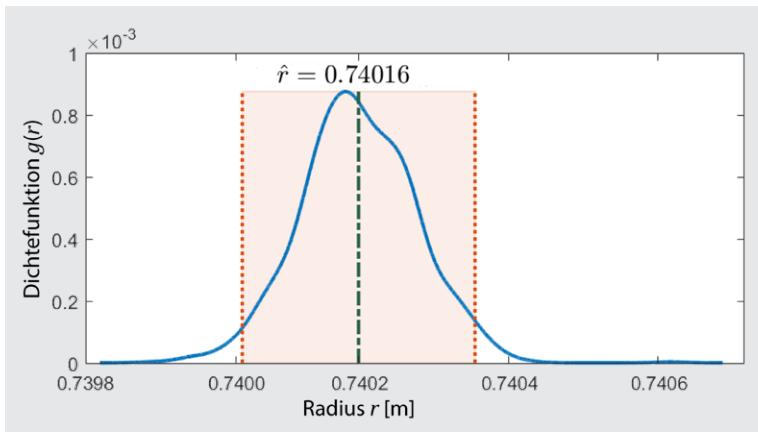


Abb. 9: Geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $g(r)$  für den Radius  $r$  mit 95 % Konfidenzintervall

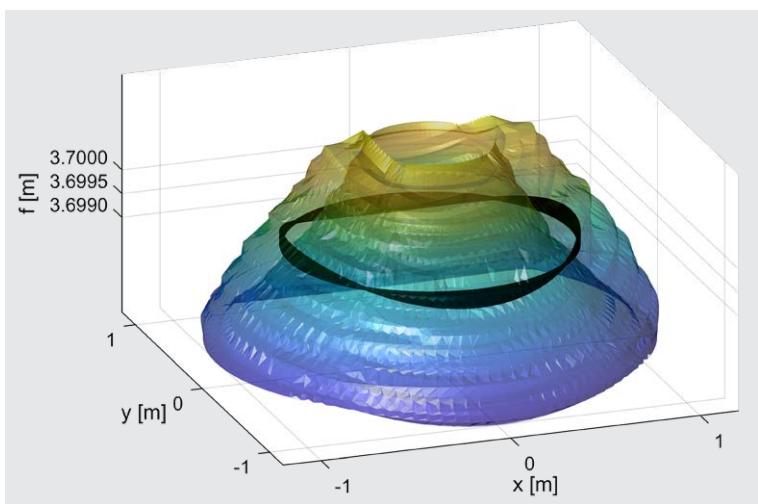


Abb. 10: Resultierende Brennfläche (schwarz) für das Modell eines elliptischen Ring-Focus-Paraboloids bezogen auf die Leitebene der mittleren Brennweite mit zugehörigem 95 % Konfidenzbereich. Die Darstellung ist in Richtung der Brennweite überhöht und die Iso-Hyperfläche des 95 % Konfidenzbereichs ist im Maßstab 2.000:1 geplottet.

sie denn existieren – aus der Ausgangsstichprobe gewonnen werden können. Der Abstand der Iso-Hyperfläche von der Brennfläche ist nicht homogen, weist aber (genähert) einen rotationssymmetrischen isotropen Verlauf auf. Der Konfidenzbereich läuft mit zunehmendem Abstand vom Paraboloid konisch zusammen, was aus der räumlichen Anordnung der Brennfläche zur Punktwolke resultiert. Die Darstellung besitzt einen deutlich höheren Anschauungsgrad als die getrennte Betrachtung der einfachen Konfidenzintervalle.

#### 4 Zusammenfassung

Sowohl die Definition als auch die Bestimmung von Messunsicherheiten unterliegt einem ständigen Veränderungs- und Anpassungsprozess. Erfahrungen und neu gewonnene Erkenntnisse auf der einen Seite aber auch technische Neuerungen wie moderne Rechenanlagen auf

der anderen Seite ermöglichen einen stetigen Evolutionsprozess. Eine Normierung der Methoden zum Bestimmen von Messunsicherheiten kann es aufgrund der variierenden Voraussetzungen in der Praxis nicht geben. Das Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz erfordert, wie auch die Monte-Carlo-Simulation, a-priori Kenntnisse bzgl. der einfließenden Unsicherheitsbeiträge und deren statistische Verteilung. Sind diese Voraussetzungen im konkreten Anwendungsfall nicht gegeben, können derartige Verfahren nicht oder zumindest nur eingeschränkt benutzt werden. Im Kontext der Formanalyse kann es mitunter herausfordernd sein, objektspezifische Unsicherheiten a-priori abzuschätzen. Ist eine belastbare Abschätzung dieser Unsicherheiten nicht mit vertretbarem Aufwand möglich und ist davon auszugehen, dass diese einen dominanten Anteil am gesamten Unsicherheitsbudget besitzen, sind alternative statistische Verfahren zur Angabe von Messunsicherheiten vorzuziehen wie z.B. das Bootstrapping. Bei diesem Verfahren wird die Messunsicherheit durch Resampling einer Ausgangsstichprobe abgeschätzt. Die Vorgehensweise beim Bootstrapping ist ähnlich der Monte-Carlo-Simulation, jedoch setzt sie keine Kenntnisse bzgl. der statistischen Verteilung der Ausgangsstichprobe voraus. Der rechnerische Aufwand ist vergleichbar.

Für die Bildung eines Konfidenzbereiches mit vorgegebener Überdeckungswahrscheinlichkeit sind unabhängig vom Bestimmungsverfahren Kenntnisse zur statistischen Verteilung der Parameter nötig. Folgen die Parameter einer bekannten Verteilung, so kann beispielsweise auf Tafelungen zum

Bilden der erweiterten Unsicherheit zurückgegriffen werden. Ist die Verteilung hingegen nicht bekannt, so lässt sich diese mit einer Kerndichteschätzung approximieren. Sowohl das Bootstrapping als auch die Kerndichteschätzung sind Werkzeuge der deskriptiven Statistik und somit konform zum GUM, auch wenn sie dort nicht explizit aufgeführt werden.

Seit 2017 betreibt das Onsala Space Observatory mit den Onsala Twin Teleskopen zwei baugleiche, VGOS-spezifizierte Radioteleskope. Die Hauptreflektoren dieser Radioteleskope sind als Ring-Focus-Paraboloiden entworfen worden, um konstruktionsbedingte Abschattungen auf dem Hauptreflektor zu minimieren. Da es sich bei einem Ring-Focus-Paraboloid um eine Kombination zweiter Flächen zweiter Ordnung handelt, können diese nicht durch ein gewöhnliches Paraboloid beschrieben werden. Zur Parameterbestimmung wird in diesem Beitrag ein mathematisches Modell für ein elliptisches Ring-Focus-Paraboloid angegeben. Dieses Modell wurde verwendet, um im Rahmen einer Formanalyse die Fertigungsqualität

des Hauptreflektors eines der beiden neuen VGOS-spezifizierten Radioteleskope zu quantifizieren. Die Abschätzung der Parameterunsicherheiten erfolgt mittels Bootstrap-Algorithmus in Kombination mit einer Kerdichteschätzung, da a-priori keine hinreichenden Vorinformationen bezüglich der Messunsicherheiten vorliegen. Neben der Bestimmung einfacher Intervalle wurde die Analyse auf die resultierende Brennfläche des elliptischen Ring-Focus-Paraboloids übertragen und visualisiert.

## Literatur

- Ahn, S.J. (2005): Least Squares Orthogonal Distance Fitting of Curves and Surfaces in Space. Lecture Notes in Computer Science (LNCS), Vol. 3151, Springer, Heidelberg. DOI: 10.1007/b104017.
- Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L., Collilieux, X. (2016): ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions. *J. Geophys. Res. Solid Earth*, Vol. 121(8), S. 6109–6131. DOI: 10.1002/2016JB013098.
- Artz, T., Springer, A., Nothnagel, A. (2014): A complete VLBI delay model for deforming radio telescopes: the Effelsberg case. *Journal of Geodesy*, Vol. 88(12), S. 1145–1161. DOI: 10.1007/s00190-014-0749-1.
- Brinkmann, B. (2012): Internationales Wörterbuch der Metrologie – Grundlegende und allgemeine Begriffe und zugeordnete Benennung (VIM). 4. Auflage, Beuth, Berlin, ISBN 978-3410224723.
- Clark, T.A., Thomsen, P. (1988): Deformations in VLBI antennas. NASA Technical Memorandum 100696, NASA, Greenbelt.
- Cutler, C. C. (1947): Parabolic-antenna design for microwaves. In: *Proceedings of the IRE*, Vol. 35(11), S. 1284–1294.
- DIN EN ISO 15530-3 (2016): Geometrische Produktspezifikation und -prüfung (GPS) – Verfahren zur Ermittlung der Messunsicherheit von Koordinatenmessgeräten (KMG) – Teil 3: Anwendung von kalibrierten Werkstücken oder Normalen (ISO 15530-3:2011). Deutsche Fassung EN ISO 15530-3:2011, Beuth, Berlin.
- Duller, C. (2008): Einführung in die nichtparametrische Statistik mit SAS und R – Ein anwendungsorientiertes Lehr- und Arbeitsbuch. Springer, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-7908-2060-7.
- Efron, B. (1979): Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, Vol. 7(1), S. 1–26. DOI: 10.1214/aos/1176344552.
- Efron, B., Tibshirani, R.J. (1994): An introduction to the bootstrap. *Monographs on Statistics and Applied Probability*, Vol. 57, Chapman & Hall, New York, ISBN 978-0412042317.
- Elgered, G., Haas, R., Conway, J., Hammargren, R., Helldner, L., Hobiger, T., Pantaleev, M., Wennerback, L. (2017): The Onsala Twin Telescopes project. In: Haas, R., Elgered, G. (Hrsg.): *Proceedings of the 23rd European VLBI Group for Geodesy and Astronomy Working Meeting*, S. 136–139, ISBN 978-9188041098.
- Engel, J., Grübel, R. (2008): Bootstrap – oder die Kunst, sich selbst aus dem Sumpf zu ziehen. *Mathematische Semesterberichte*, Vol. 55(2), S. 113–130. DOI: 10.1007/s00591-008-0036-4.
- Franke, M., Kistner, T., Hausotte, T., Heißelmann, D., Schwehn, C., Wendt, K. (2017): Bestimmung der Messunsicherheit für Koordinatenmesssysteme. *tm – Technisches Messen*, Vol. 84(5), S. 325–335. DOI: 10.1515/teme-2017-0016.
- Haas, R. (2013): The Onsala twin telescope project. In: Zubko, N., Poutanen, M. (Hrsg.): *Proceedings of the 21st European VLBI Group for Geodesy and Astronomy Working Meeting*, S. 61–66, ISBN 978-9517112963.
- Hall, P. (1987): On the Bootstrap and Likelihood-Based Confidence Regions. *Biometrika*, Vol. 74(3), S. 481–493. DOI: 10.2307/2336687.
- Harmening, C., Neuner, H. (2016): Choosing the Optimal Number of B-spline Control Points (Part 1: Methodology and Approximation of Curves). *Journal of Applied Geodesy*, Vol. 10(3), S. 139–157. DOI: 10.1515/jag-2016-0003.
- Hennes, M. (2007): Konkurrierende Genauigkeitsmaße – Potential und Schwächen aus der Sicht des Anwenders. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN)*, Vol. 114(4), S. 136–146.
- JCGM100 (2008): Evaluation of measurement data – guide to the expression of uncertainty in measurement – gum 1995 with minor corrections.
- JCGM101 (2008): Evaluation of measurement data – supplement 1 to the ‘guide to the expression of uncertainty in measurement’ – propagation of distributions using a monte carlo method.
- JCGM102 (2011): Evaluation of measurement data – supplement 2 to the ‘guide to the expression of uncertainty in measurement’ – extension to any number of output quantities.
- Koch, K.R. (2007): *Introduction to Bayesian Statistics*. 2. Auflage, Springer, Berlin, ISBN 978-3642091834.
- Krystek, M. (2012): Berechnung der Messunsicherheit: Grundlagen und Anleitung für die praktische Anwendung. Beuth, Berlin, ISBN 978-3410209324.
- Lanza, G., Peters, J. (2010): Werkstückeinfluss bei der Auswertung in der Koordinatenmesstechnik. *tm – Technisches Messen*, Vol. 77(5), S. 276–282. DOI: 10.1524/teme.2010.0991.
- Lösler, M. (2011): Robuste Schätzung der Transformationsparameter einer räumlichen Helmert-Transformation. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN)*, Vol. 118(5), S. 187–191.
- Lösler, M., Eschelbach, C., Haas, R. (2017): Unified Model for Surface Fitting of Radio Telescope Reflectors. In: Haas, R., Elgered, G. (Hrsg.): *Proceedings of the 23rd European VLBI for Geodesy and Astrometry (EVGA) Working Meeting*, S. 29–34, ISBN 978-9188041098.
- Lösler, M., Eschelbach, C., Haas, R. (2018): Zur Modellierung eines Ring-Focus-Paraboloids. In: Luhmann, T., Schumacher, C. (Hrsg.): *Photogrammetrie – Laserscanning – Optische 3D-Messtechnik: Beiträge der Oldenburger 3D-Tage 2018*, Wichmann, Berlin. (Im Druck)
- Lösler, M., Nitschke, M. (2010): Bestimmung der Parameter einer Regressionsellipse in allgemeiner Raumlage. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN)*, Vol. 117(3), S. 113–117.
- Nedden, M. (2012): Neue Methoden zur Charakterisierung der QSAR-Anwendungsdomäne – Modifizierte Kerdichteschätzung der Vorherseegüte empirisch abgeleiteter Modelle in der Chemie. Springer, Wiesbaden. DOI: 10.1007/978-3-8348-2489-9.
- Nitschke, M. (2005): Geometrie – Anwendungsbezogene Grundlagen und Beispiele. Carl Hanser, München, ISBN 978-3446226760.
- Petrachenko, B., Niell, A., Behrend, D., Corey, B., Böhm, J., Charlott, P., Collion, A., Gipson, J., Haas, R., Hobiger, T., Koyama, Y., MacMillan, D., Malkin, Z., Nilsson, T., Pany, A., Tuccari, G., Whitney, A., Wresnik, J. (2009): Design aspects of the VLBI2010 system. NASA/TM-2009-214180, Washington, DC.
- Scott, D.W. (2015): *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization – Theory, Practice and Visualization*. John Wiley & Sons, 2. Auflage, Hoboken, ISBN 978-0471697558.
- Silverman, B. W. (1986): *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Monographs on Statistics and Applied, Vol. 26, Chapman & Hall, New York, ISBN 978-0412246203.
- Wand, M., Jones, M. C. (1995): *Kernel Smoothing*. Monographs on Statistics and Applied Probability, Vol. 60, Chapman & Hall, New York, ISBN 978-0412552700.

## Kontakt

Michael Lösler | Cornelia Eschelbach  
Frankfurt University of Applied Sciences  
Labor für Industrielle Messtechnik  
Nibelungenplatz 1, 60318 Frankfurt am Main, Deutschland  
michael.loesler@fb1.fra-uas.de  
cornelia.eschelbach@fb1.fra-uas.de

Rüdiger Haas  
Chalmers University of Technology  
Onsala Space Observatory  
439 92 Onsala, Schweden  
rudiger.haas@chalmers.se

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter [www.geodaeis.info](http://www.geodaeis.info).