

Evaluation regionaler Quasigeoidlösungen in synthetischer Umgebung

Karen Insa Wolf

Zusammenfassung

In diesem Beitrag werden die Ergebnisse der regionalen Quasigeoidberechnung auf Basis der spektralen Kombination eines globalen Potentialmodells und terrestrischer Schweredaten evaluiert. Es werden synthetische Daten mit (unkorreliertem und korreliertem) Rauschen für einen Soll-Ist-Vergleich in allen Datenpunkten verwendet. Die Berechnung erfolgt über die Integration mit einer Kernfunktion, die nach dem Ansatz nach kleinsten Quadraten und nach dem Ansatz von Meissl modifiziert wird. Die Soll-Ist-Differenzen werden durch die Ergebnisse aus der statistischen Berechnung der Genauigkeiten bestätigt. Es werden der Einfluss des Abbruchs der Kernfunktion in der Integration und die Auswirkung der Vernachlässigung der individuellen Punkthöhe der Beobachtungen numerisch bewertet.

Summary

In this paper, the computation of a regional quasigeoid based on the spectral combination of a global geopotential model and terrestrial gravity data are evaluated. Synthetic data sets including (uncorrelated and correlated) noise are used for a closed-loop evaluation in all data points. Integral formulas with modified kernel functions are applied based on a least-squares approach and on the approach proposed by Meissl. The closed-loop differences are confirmed by results from a statistical computation of the quasigeoid accuracy. The influence of the truncation of the integral kernel and the effect of neglecting the individual heights of the data points are evaluated numerically.

1 Einleitung

In der regionalen Quasigeoidberechnung werden terrestrische Schweredaten mit einem globalen Potentialmodell (GPM) kombiniert. Eine spektrale Kombination der Daten kann durch Einführung von modifizierten Kernfunktionen im Integrationsverfahren erreicht werden. Die Qualität der regionalen Lösung wird von der Abbruchstelle der Kernfunktion beeinflusst. Neben diesem Effekt wird der Einfluss der Vernachlässigung der individuellen Punkthöhe der Beobachtungsdaten untersucht. Bei einer Vernachlässigung bleiben die Korrekturterme in der Quasigeoidlösung nach Molodenskii unberücksichtigt, formal wird die Lösung nach Stokes angewendet. In den numerischen Berechnungen werden zur Evaluierung der Ergebnisse synthetische Daten eingesetzt, wobei verschiedene Rauschszszenarien zugrunde gelegt werden.

2 Berechnungsverfahren

Das geodätische Randwertproblem zur Berechnung der Geoidhöhe N bzw. ζ_0 aus Schwereanomalien Δg_0 wurde schon im Jahre 1849 von Stokes für das Geoid als Randfläche in sphärischer Näherung gelöst (Heiskanen und Moritz 1967, S. 94):

$$N(\theta_{P_0}, \lambda_{P_0}) = \zeta(\theta_{P_0}, \lambda_{P_0}) \quad (1)$$

$$= \frac{R}{4\pi\gamma_{P_0}} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g(\theta_{Q_0}, \lambda_{Q_0}) d\sigma.$$

Die Stokes-Funktion $S(\psi)$ gewichtet die Schwereanomalien Δg_0 entsprechend dem sphärischen Abstand ψ zwischen dem Aufpunkt P_0 und dem Quellpunkt Q_0 . Die isotrope Stokes-Funktion $S(\psi)$ kann neben der geschlossenen Form auch in Reihenentwicklung

$$S(\psi) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{2\ell+1}{\ell-1} P_{\ell}(\cos \psi) \quad (2)$$

mit Hilfe der Legendre-Polynome P_{ℓ} dargestellt werden. Gemäß der Formel von Bruns (Heiskanen und Moritz 1967, S. 85) wird die Integrationslösung durch den Normalschwerevektor γ_{P_0} dividiert, um die Geoidhöhe N zu erhalten. In der sphärischen Näherung werden die ellipsoidischen Koordinaten der Punkte den sphärischen Koordinaten (Poldistanz θ , Länge λ) gleichgesetzt. Der Radius R ist der mittlere Erdradius. Die Schwereanomalien Δg_0 und auch die Lösung ζ_0 beziehen sich auf das Geoid (in sphärischer Approximation).

2.1 Grundlagen

Um die Bedingung für harmonische Funktionen zu erfüllen, muss für die Berechnung des Geoids nach Stokes der Gravitationseffekt der Massen außerhalb des Geoids reduziert werden. Auf eine Reduktion der Massen mit Einführung von Dichtehypothesen kann verzichtet werden, wenn das Randwertproblem nicht auf dem Geoid, sondern auf der Erdoberfläche gelöst wird (Molodenskii et al. 1962).

Im Gegensatz zur Stokes-Formel (1) hängt die Lösung nach Molodenskii nicht allein von den Schwereanomalien ab, sondern auch von der Geländeneigung. Es ergibt sich eine Reihenentwicklung, die häufig als Molodenskii-Reihe bezeichnet wird. Als Alternative wird in Moritz (1980, S. 377 ff.) die analytische Fortsetzung zur Lösung des Molodenskii-Problems angegeben. Die an der

Erdoberfläche definierten Schwereanomalien Δg_Q werden dazu zunächst analytisch auf eine einheitliche Referenzhöhe fortgesetzt. Diese reduzierten Schwereanomalien sind theoretische Größen und haben keine physikalische Entsprechung (Heiskanen und Moritz 1967, S. 319). Auf Basis der reduzierten Schwerenanomalien kann Gleichung (1) in der gewählten Referenzhöhe im Sinne von Stokes ausgewertet werden. Das Störpotential bzw. die Höhenanomalie an der Erdoberfläche wird anschließend ebenfalls durch analytische Fortsetzung in der entsprechenden Höhe berechnet. Die Fortsetzung erfolgt über eine Taylor-Reihenentwicklung. Dazu werden die radialen Gradienten $\frac{\partial^n}{\partial r^n}$ der Ordnung n eingeführt, bezogen auf die Schwereanomalien ergeben sich die Fortsetzungsoperatoren $L_n(\cdot)$. Die Lösung mit Beschränkung auf die Ableitung der 1. Ordnung wird auch als Gradientenlösung bezeichnet (Moritz 1980, S. 387).

In Sideris (1987) wird das mehrstufige Verfahren (Fortsetzung nach unten, Lösung nach Stokes, Fortsetzung nach oben) umformuliert, um die Anwendung der Schnellen Fouriertransformation (FFT) bei der numerischen Auswertung der Integration zu ermöglichen, siehe auch Gerlach (2003, S. 77). Die Integration muss dabei unabhängig vom Berechnungspunkt P erfolgen. Es ergibt sich zunächst der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \zeta(\theta_P, \lambda_P, r_P) &= \frac{R}{4\pi\gamma_P} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g_Q^T d\sigma \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R}{4\pi\gamma_P} \iint_{\sigma} S(\psi) g_m d\sigma \\ &= \zeta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Lösung (1) nach Stokes wird demnach um die Terme ζ_m durch Hinzunahme der Terme g_m in der Integration ergänzt. Die Schwereanomalien Δg_Q sind an der Erdoberfläche in der Höhe H_Q definiert. Die Radien der Punkte P und Q ergeben sich in sphärischer Näherung zu $r_P = R + H_P$ bzw. $r_Q = R + H_Q$. Durch Anwendung der Korrekturterme g_m kann die individuelle Punkthöhe der Eingangsdaten bei der Integration über die Kugel berücksichtigt werden. Die topographische Reduktion der Schwereanomalien auf Basis eines residualen Topographiemodells (RTM) führt aufgrund der Signalglättung zu einer Verkleinerung der Korrekturterme und damit insgesamt zu einer schnelleren Konvergenz der Reihe in (3), siehe Forsberg und Sideris (1989) und Denker und Tziavos (1999). Die Korrekturterme ergeben sich zu

$$g_m = \sum_{n=1}^m (h_P^n - h_Q^n) L_n(g_{m-n}^0) \quad (4)$$

mit den Anteilen der Korrekturterme auf Meeresniveau

$$g_n^0 = - \sum_{k=1}^n h_Q^k L_k(g_{n-k}^0); \quad g_0^0 = \Delta g^T \quad (5)$$

und dem Fortsetzungsoperator (Gerlach 2003, S. 77)

$$L_1(\Delta g^T, P) = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g_Q^T - \Delta g_P^T}{\ell_0^3} d\sigma, \quad (6)$$

$$L_n(\cdot) = \frac{1}{n} L_1(L_{n-1}(\cdot)). \quad (7)$$

Dabei ist $\ell_0 = 2R \sin(\psi/2)$ die gradlinige Distanz zwischen Berechnungs- und Integrationspunkt (Heiskanen und Moritz 1967, S. 38).

Die Berechnung des Fortsetzungsoperators wird als Summe zweier Faltungen geschrieben, die dann mit Hilfe des 1D-FFT-Verfahrens nach Haagmans et al. (1993) ausgewertet werden können, da beide Faltungen unabhängig vom Berechnungspunkt P erfolgen:

$$L_1(\Delta g^T, P) = \frac{R^2}{2\pi} [\Delta g_Q^T * \frac{1}{\ell_0^3}] - \frac{R^2}{2\pi} \Delta g_P^T [1 * \frac{1}{\ell_0^3}]. \quad (8)$$

Dazu ist ein Datengitter, dessen Elemente mit den Reziprokwerten der Abstände ℓ_0^3 belegt sind, zu erstellen.

Ähnlich lässt sich auch Gleichung (3) umformulieren, so dass sich für die Korrekturterme

$$\begin{aligned} \zeta_m &= \frac{R}{4\pi\gamma_P} \sum_{n=1}^m (h_P^n [L_n(g_{m-n}^0) * S(\psi)] \\ &- [h_Q^n L_n(g_{m-n}^0) * S(\psi)]) \end{aligned} \quad (9)$$

ergibt, vgl. Gerlach (2003, S. 78). Auch hier wird in der Auswertung die 1D-FFT-Methode eingesetzt.

2.2 Remove-Restore-Verfahren

In der regionalen Quasigeoidberechnung wird das Remove-Restore-Verfahren zur Kombination von Datenquellen eingesetzt. In dieser Untersuchung werden Daten eines GPM mit terrestrischen Schwereanomalien kombiniert. Dabei wird der langwellige Signalanteil Δg^M des GPM von den terrestrischen Daten Δg^T abgezogen:

$$\Delta g^R = \Delta g^T - \Delta g^M. \quad (10)$$

Die residualen Schwereanomalien Δg^R werden dann in der Integration (3) verwendet, um die residualen Quasigeoidhöhen ζ^R zu berechnen. Diese werden anschließend mit Hilfe des GPM restituiert:

$$\zeta = \zeta^R + \zeta^M. \quad (11)$$

Durch Nutzung der residualen Werte wird der Einfluss der sphärischen Näherung in der Integration verringert. Bei Verwendung der ursprünglichen Kernfunktion $S(\psi)$ in der Integration werden formal innerhalb des Integrationsgebietes ausschließlich die terrestrischen Daten verwendet, vgl. Rapp und Rummel (1975), Wolf (2007). Erst bei Modifikation der Kernfunktion können Signalanteile des GPM auch innerhalb des Integrationsgebietes verwendet werden.

2.3 Kernmodifikationen

In der bisher dargestellten Approximation von ζ werden innerhalb des Integrationsgebietes ausschließlich die terrestrischen Daten Δg^T verwendet. Der langwellige Signalanteil wird aber im Allgemeinen besser durch ein aktuelles GPM als durch terrestrische Daten repräsentiert. Zum einen können die terrestrischen Daten prinzipiell den sehr langwelligen Signalanteil nicht gut wiedergeben, da sie nur regional begrenzt vorliegen, zum anderen führen Inkonsistenzen in der Datumsfestlegung der Höhennetze und systematische Fehler in den Nivellementsnetzen zu Fehlern im langwelligen Signalbereich (bis etwa zum sphärisch-harmonischen Grad 200) der terrestrischen Daten (Heck 1990).

Es bietet sich daher an, die Beobachtungen Δg^M und Δg^T innerhalb des Integrationsgebietes spektral zu kombinieren. Der Integralkern $S(\psi)$ wird dazu durch Einführung spektraler Gewichte w_ℓ in der Reihenentwicklung (2) modifiziert:

$$S^W(\psi) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{2\ell+1}{\ell-1} w_\ell P_\ell(\cos \psi) . \quad (12)$$

Die Verfahren zur spektralen Kombination können in deterministisch und stochastisch motivierte Ansätze unterteilt werden (Heck und Grüninger 1987). Ziel der deterministischen Ansätze ist in erster Linie die Reduktion des Vernachlässigungsfehlers, der bei der regional begrenzten Integration auftritt. Der Vernachlässigungsfehler, siehe auch Abschnitt 3, zeigt bei konstantem Abbruch der Kernfunktion in der ersten Nullstelle ein lokales Minimum (Heck 1979, Heck und Grüninger 1983). Dieser Zusammenhang wird in der Modifikation nach Meissl (1971) ausgenutzt. Durch Subtraktion des Wertes $S(\psi_0)$ vom Integralkern $S(\psi)$ wird an der beliebig gewählten Abbruchstelle ψ_0 eine Nullstelle erzeugt:

$$S^M(\psi) = S(\psi) - S(\psi_0) . \quad (13)$$

Eine deutliche Verkleinerung des Vernachlässigungsfehlers kann mit der Modifikation nach Meissl erzielt werden, wenn als Abbruchradius ein bzw. das erste (lokale) Minimum der Kernfunktion gewählt wird (Heck und Grüninger 1987, Wolf und Kieler 2007). Die Modifikation kann auch mit Hilfe spektraler Gewichte formuliert werden (Heck und Grüninger 1987):

$$w_\ell^M = \begin{cases} S(\psi_0) & \ell = 0 \\ 0 & \ell = 1 \\ 1.0 & \ell > 1 \end{cases} . \quad (14)$$

Stochastisch motivierte Ansätze berücksichtigen statistische Angaben des Rauschens der terrestrischen Daten und des GPM (Moritz 1976, Sjöberg 1981, Wenzel 1981). Auf Basis der Fehlergradvarianzen der Beobachtungen werden spektrale Gewichte w_ℓ für eine (im Sinne der Methode nach kleinsten Quadraten durch Minimierung der Varianz) optimale Kombination der Daten abgeleitet. Ein

Problem dabei ist, dass Angaben über das Rauschen gerade für die terrestrischen Daten häufig unbekannt sind oder auf Schätzungen basieren, weshalb die stochastisch basierten Methoden von manchen Autoren kritisch betrachtet werden, z. B. de Min (1996), Featherstone (2003). Es empfiehlt sich in jedem Fall, die abgeleiteten spektralen Gewichte auf Plausibilität zu überprüfen. Ein Vorteil der stochastisch motivierten Verfahren ist, dass durch die Kopplung der spektralen Gewichte mit den Annahmen über das Rauschen der Beobachtungen beispielsweise die Auswirkung des Genauigkeitsgewinns durch Einsatz der GPM aktueller Satellitenmissionen in der spektralen Kombination direkt verfolgt werden kann (z. B. Denker 2003, Wolf 2006). Im stochastischen Ansatz nach kleinsten Quadraten ergeben sich die spektralen Gewichte für die terrestrischen Schwereanomalien Δg^T zu (Wenzel 1981)

$$w_\ell = \frac{\sigma_\ell^2(\epsilon_{\Delta g^M})}{\sigma_\ell^2(\epsilon_{\Delta g^M}) + \sigma_\ell^2(\epsilon_{\Delta g^T})} \quad \text{für } \ell > 1 \quad (15)$$

mit den Fehlergradvarianzen $\sigma_\ell^2(\epsilon_{\Delta g^T})$ der terrestrischen Daten und den Fehlergradvarianzen $\sigma_\ell^2(\epsilon_{\Delta g^M})$ des GPM, deren Kenntnis hierbei vorausgesetzt wird. Der in der regionalen Integration auftretende Abbruch der Kernfunktion bleibt in (15) unberücksichtigt, anders als in der aufwendigeren Modifikation nach Sjöberg (1984). In der numerischen Untersuchung wird die Modifikation auf Basis der Gewichte (15) mit der Modifikation nach Meissl auch kombiniert angewendet, wie es bereits von Heck und Grüninger (1987) für die deterministische Modifikation nach Wong und Gore (1969) vorgeschlagen wurde.

3 Statistische Fehlerabschätzung

Die Varianz der resultierenden Quasigeoidwerte wird durch Fehlerfortpflanzung auf Basis von Fehler- und Signalgradvarianzen abgeschätzt. Dies ist möglich, wenn von homogenen und isotropen Fehler- und Signalkovarianzfunktionen ausgegangen wird und in der regionalen Integration eine konstante Abbruchdistanz ψ_0 verwendet wird. Es werden hier lediglich die relevanten Gleichungen angegeben, die Herleitung ist im Detail in Wolf (2007) zu finden.

Die Varianz σ_ζ^2 der Quasigeoidhöhe wird auf Basis von Gradvarianzen abgeschätzt durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta^2 &= \frac{R^2}{4\gamma^2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (\bar{Q}_n^{1-w_\ell} + Q_n^1)^2 \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M}) \\ &\quad + \frac{R^2}{4\gamma^2} \sum_{n=2}^{\infty} (\bar{Q}_n^{w_\ell})^2 \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T}) \\ &\quad + \frac{R^2}{4\gamma^2} \sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} (Q_n^{w_\ell})^2 \sigma_n^2(\Delta g) \\ &= \sigma_{\epsilon^M}^2 + \sigma_{\epsilon^T}^2 + \sigma_O^2 . \end{aligned} \quad (16)$$

Es werden die Fehlerbeiträge resultierend aus den Fehlern des GPM (σ_{ϵ^M}), aus den Fehlern der terrestrischen Daten (σ_{ϵ^T}) und aus der Vernachlässigung des Signals (σ_O) außerhalb des Integrationsgebietes, der Kugelkappe mit dem Radius ψ_0 , addiert.

Die Beiträge innerhalb und außerhalb der Integrationskappe werden hier spektral mit Hilfe der Abbruchkoeffizienten Q_n (Außenbereich) und \bar{Q}_n (Innenbereich) berücksichtigt. Die von Molodenskii eingeführten Abbruchkoeffizienten Q_n (Molodenskii et al. 1962), die für die ursprüngliche Stokes-Funktion (2) eingeführt wurden, werden dafür auf den modifizierten Kern $S^W(\psi)$ aus (12) übertragen:

$$Q_n^{w_\ell}(\psi_0) = \int_{\psi=\psi_0}^{\pi} S^W(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi. \quad (17)$$

Gleichung (17) wird numerisch mit Hilfe von Rekursionsformeln ausgewertet (Paul 1973). Die spektralen Gewichte w_ℓ gehen bei der Berechnung des modifizierten Kerns $S^W(\psi)$ nach (12) ein. Bei der Berechnung von Q_n^1 aus (16) werden alle Gewichte w_ℓ zu 1 gesetzt. Außerdem gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n^{w_\ell}(\psi_0) &= \int_{\psi=0}^{\psi_0} S^W(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \\ &= \frac{2}{n-1} w_n - Q_n^{w_\ell}(\psi_0). \end{aligned} \quad (18)$$

Zur Berechnung von $\bar{Q}_n^{1-w_\ell}$ in (16) wird in Gleichung (18) w_ℓ mit $1 - w_\ell$ bzw. w_n mit $1 - w_n$ ersetzt.

Die Fehlergradvarianzen $\sigma_\ell^2(\epsilon_{\Delta g^M})$, die in Gleichung (15) und (16) verwendet werden, basieren auf den Varianzen der sphärisch-harmonischen Koeffizienten ($\sigma_{\bar{c}_{\ell m}}^2, \sigma_{\bar{s}_{\ell m}}^2$) des GPM:

$$\sigma_\ell^2(\epsilon_{\Delta g^M}) = \left(\frac{GM}{R}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{2\ell} \left(\frac{\ell-1}{R}\right)^2 \sum_{m=0}^{\ell} (\sigma_{\bar{c}_{\ell m}}^2 + \sigma_{\bar{s}_{\ell m}}^2). \quad (19)$$

Die Signalgradvarianzen $\sigma_\ell^2(\Delta g)$ werden mit Hilfe des Gradvarianzmodells von Tscherning und Rapp (1974) unter Verwendung globaler Parameter berechnet.

Die Fehlergradvarianzen $\sigma_\ell^2(\epsilon_{\Delta g^T})$ der terrestrischen Daten werden auf Basis des angenommenen Rauschens der Daten berechnet, dabei wird einerseits von unkorreliertem, andererseits von korreliertem Rauschen ausgegangen.

Unkorreliertes Rauschen

Die Fehlergradvarianzen werden im Sinne von bandlimitiertem weißen Rauschen durch gleichmäßige Verteilung des Rauschniveaus $\sigma(\epsilon_{\Delta g^T}^{UK})$ über einen spektralen Bereich ℓ_{band} , der in Abhängigkeit der Auflösung der terrestrischen Daten zu wählen ist, berechnet:

$$\sigma_\ell^2(\epsilon_{\Delta g^T}^{UK}) = \frac{\sigma^2(\epsilon_{\Delta g^T}^{UK})}{\ell_{band}}. \quad (20)$$

Streng unkorreliertes Rauschen ist in der Realität kaum zu erreichen, es wird aber dennoch in der Praxis häufig aus mangelnder Kenntnis des wahren Korrelationsverhaltens vorausgesetzt.

Korreliertes Rauschen

Die Fehlergradvarianzen werden durch eine Legendre-Transformation einer homogenen und isotropen Fehlerkovarianzfunktion abgeleitet (Wenzel und Arabelos 1981):

$$\sigma_\ell^2(\epsilon_{\Delta g^T}^K) = \frac{2\ell+1}{2} \int_{\psi=0}^{\pi} C_{\epsilon_{\Delta g}^K}(\psi) P_\ell(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi. \quad (21)$$

Die Kovarianzfunktion $C_{\epsilon_{\Delta g}^K}(\psi)$ des korrelierten Rauschens ist durch ein Modell festzulegen, hier wird ein Modell in Anlehnung an Weber und Wenzel (1983) mit dem Rauschniveau $\sigma(\epsilon_{\Delta g^T}^K)$ gewählt:

$$C_{\epsilon_{\Delta g}^K}(\psi) = \sigma^2(\epsilon_{\Delta g^T}^K) e^{-4.0\psi[^\circ]}. \quad (22)$$

4 Synthetische Umgebung

Die numerischen Ergebnisse der Integration nach Molodenskii werden auf Basis synthetischer Daten in verschiedenen Szenarien evaluiert. Dabei wird die Rauschcharakteristik der terrestrischen Daten einerseits und die Abbruchstelle der Kernfunktion andererseits variiert.

4.1 Datengrundlage

Die synthetische Umgebung basiert auf zwei Komponenten. Ein globales Potentialmodell synGPM1300S (EIGEN-GL04C, $\ell = 2 \dots 360$, GFZ 2006, und GPM98C, $\ell = 361 \dots 1300$, Wenzel 1999) wird zur Erzeugung der synthetischen Ein- und Ausgangsdaten verwendet. Ein digitales Geländemodell (DGM, Datenbank des Instituts für Erdmessung, vgl. Wolf 2007) dient zur Simulation der Erdoberfläche, in deren Höhe die Beobachtungen referenziert sind. Das Testgebiet liegt in Zentraleuropa und ist in Abb. 1 dargestellt. Es hat eine Ausdehnung von 22° in der geographischen Breite und 34° in der geographischen Länge, die Alpen als Hochgebirgsstruktur liegen zentral im Testgebiet.

Basierend auf dem synGPM1300S und dem DGM werden folgende synthetische Datensätze abgeleitet:

1. Schwereanomalien Δg^T bis Grad und Ordnung $\ell_{\max} = 1300$ (Abb. 2) sowie Schwereanomalien Δg^M bis Grad und Ordnung $\ell_{\max} = 360$ (Abb. 3) für den Remove-Schritt (10), jeweils in Höhe des DGM;
2. Quasigeoidhöhen ζ bis Grad und Ordnung $\ell_{\max} = 1300$ (Abb. 4), die als Sollwerte fungieren, sowie Quasigeoidhöhe ζ^M bis Grad und Ordnung

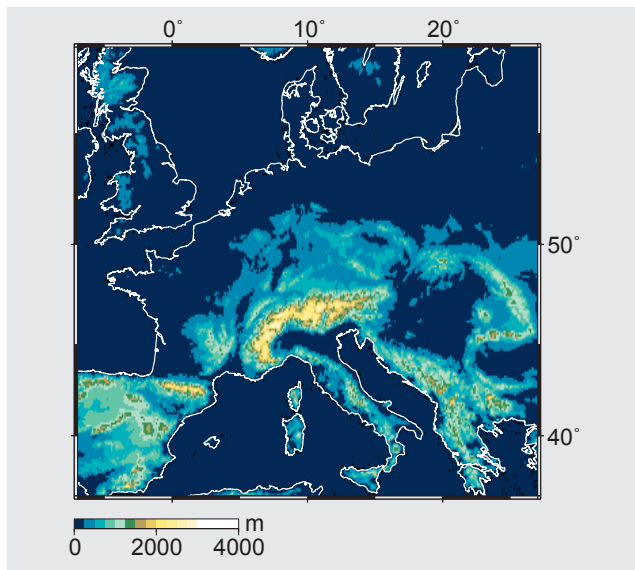


Abb. 1: Digitales Geländemodell des Testdatengebietes

$\ell_{\max} = 360$ für den Restore-Schritt (11), ebenfalls in Höhe des DGM.

Das Spektrum der synthetischen Daten wurde hier auf den maximalen Entwicklungsgrad $\ell_{\max} = 1300$ begrenzt, da Schwereanomalien simuliert werden, deren hochfrequente Signalanteile bereits auf Basis eines residualen Topographiemodells reduziert wurden. Die RTM-Reduktion wird hier nicht näher behandelt, es sei verwiesen auf Forsberg und Tscherning (1981), Gerlach (2003).

Die Statistik der Datensätze ist in Tab. 1 angegeben. Die Auflösung des jeweiligen Datengitters beträgt $6'$. Diese Auflösung genügt nach dem Nyquist-Theorem zur Abtastung der Schwerefeldsignale ($\ell_{\max} = 1300$ entspricht einer Auflösung von ca. $8.3'$). Das DGM basiert auf Blockmittelwerten mit einer Auflösung von $5'$, dies entspricht etwa einem maximalen Entwicklungsgrad von $\ell_{\max} = 2160$. Das Signal des DGM enthält höhere Frequenzanteile als das reduzierte Schwerefeldsignal, da die Höhen der Punkte nach einer RTM-Reduktion erhalten bleiben (Gerlach 2003, S. 70). Die residualen Schwereanomalien Δg^R , die in der Integration verwendet werden, sind in Abb. 5 dargestellt.

4.2 Testscenarien

Es werden unterschiedliche Testscenarien numerisch ausgewertet. Die synthetischen Daten Δg^T und Δg^M werden verrauscht, dabei werden für die terrestrischen Daten zwei verschiedene Rauschscenarien generiert. Außerdem wird die Auswirkung des Kernabbruchs in der Integration untersucht.

4.2.1 Variation des Rauschens

Bei den synthetischen Datensätzen Δg^T und Δg^M wird Rauschen zugefügt. Die Rauschwerte $\epsilon_{\Delta g^M}$ der Δg^M ba-

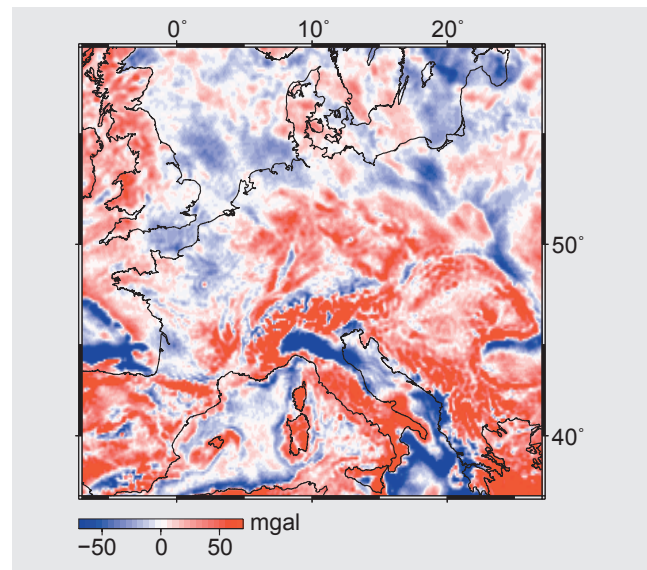


Abb. 2: Synthetische Schwereanomalien Δg^T mit $\ell_{\max} = 1300$

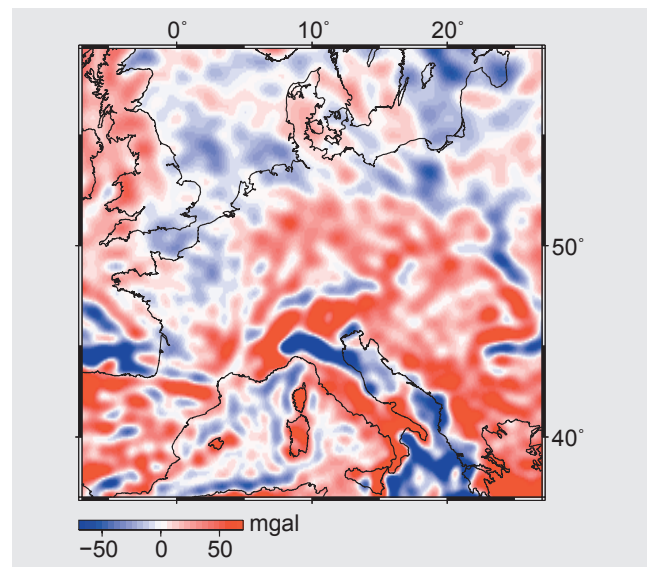


Abb. 3: Synthetische Schwereanomalien Δg^M mit $\ell_{\max} = 360$

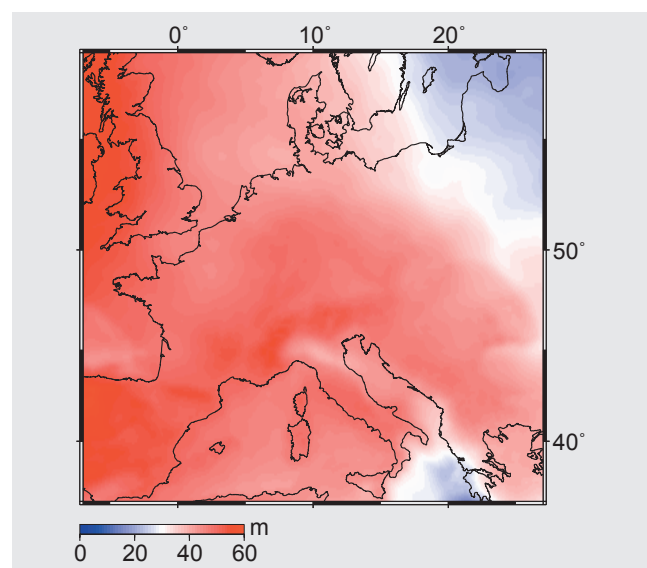


Abb. 4: Synthetische Quasigeoidhöhen ζ mit $\ell_{\max} = 1300$

Tab. 1: Statistik der synthetischen Datensätze und des synthetischen Rauschens (angegeben sind Mittelwert, Standardabweichung, Minimal- und Maximalwert)

	Mtw	Std	Min	Max
Signal				
Δg^T [mGal]	10.04	33.82	-175.74	213.39
Δg^M [mGal]	10.16	30.62	-153.60	151.00
Δg^R [mGal]	-0.12	14.64	-159.55	142.87
ζ [m]	43.32	8.22	15.36	59.13
ζ^M [m]	43.33	8.22	15.76	58.71
ζ^R [m]	-0.00	0.17	-1.45	1.41
Rauschen				
$\epsilon_{\Delta g^M}$ [mGal]	0.03	6.56	-24.33	25.43
$\epsilon_{\Delta g^T}^{UK}$ [mGal]	-0.00	1.00	-4.36	4.22
$\epsilon_{\Delta g^T}^K$ [mGal]	-0.02	1.02	-4.28	4.46

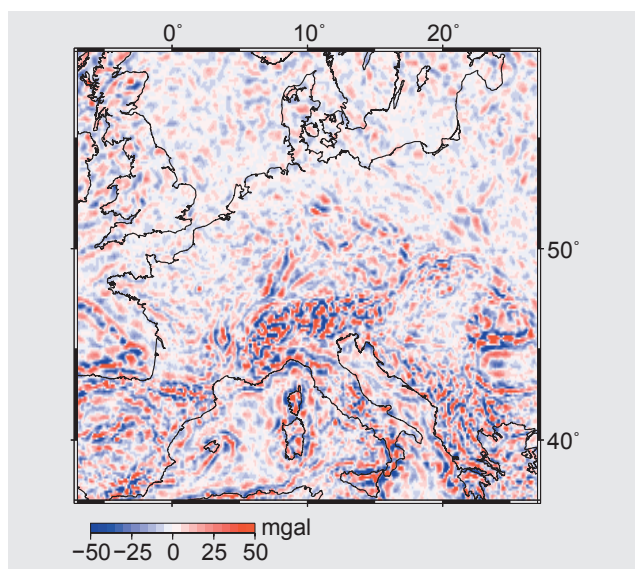


Abb. 5: Synthetische residuale Schwereanomalien Δg^R

sieren auf den Standardabweichungen des zugrunde liegenden GPM und sind in Abb. 6 dargestellt, siehe auch Wolf (2007). Für die terrestrischen Daten Δg^T werden zwei Szenarien gewählt: unkorreliertes Rauschen $\epsilon_{\Delta g^T}^{UK}$ (Abb. 7) und korreliertes Rauschen $\epsilon_{\Delta g^T}^K$ (Abb. 8), jeweils mit einem Niveau von 1 mGal. Die Szenarien werden im Folgenden mit 1UK bzw. 1K bezeichnet. Die Statistik der Rauschwerte ist in Tab. 1 angegeben.

Das unkorrelierte Rauschen basiert auf normalverteilten Zufallszahlen, das korrelierte Rauschen wird im Ortsraum durch Multiplikation eines Vektors aus unkorrelierten Werten mit dem Cholesky-Faktor der Fehlerkovarianzmatrix erzeugt, siehe Wolf (2006, 2007). Für die hier verwendete isotrope Fehlerkovarianzfunktion wäre auch eine Erzeugung im Frequenzraum möglich, siehe Agren (2004).

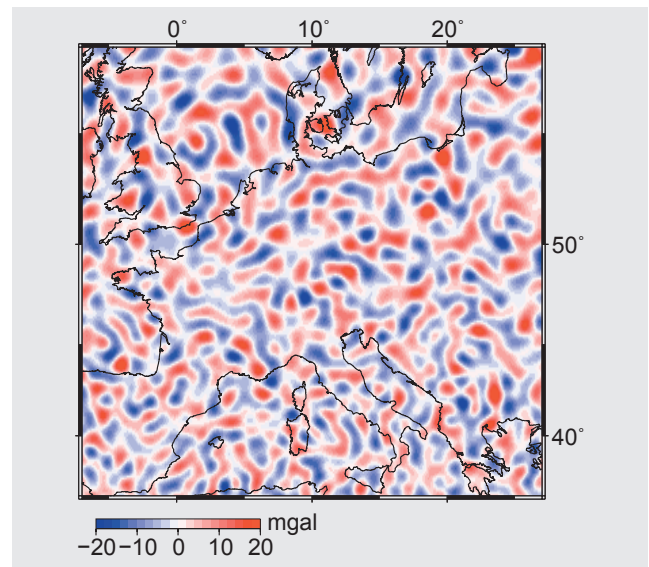


Abb. 6: Synthetisches Rauschen der Schwereanomalien Δg^M

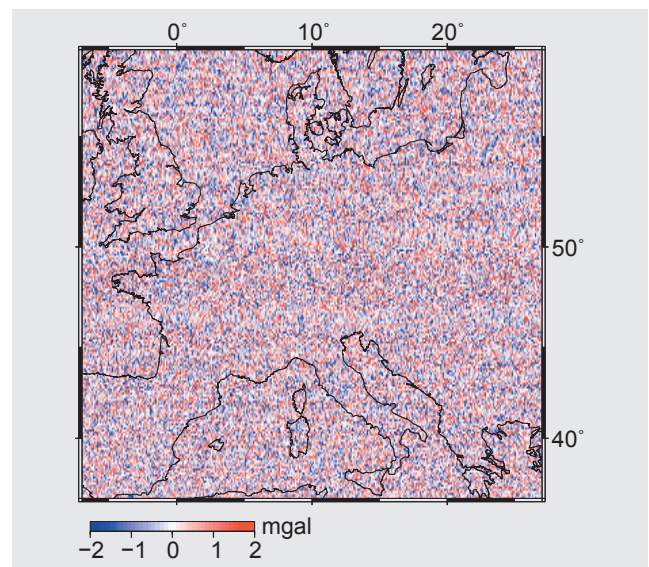


Abb. 7: Synthetisches Rauschen der terrestrischen Daten Δg^T , Szenario 1UK (unkorreliertes Rauschen)

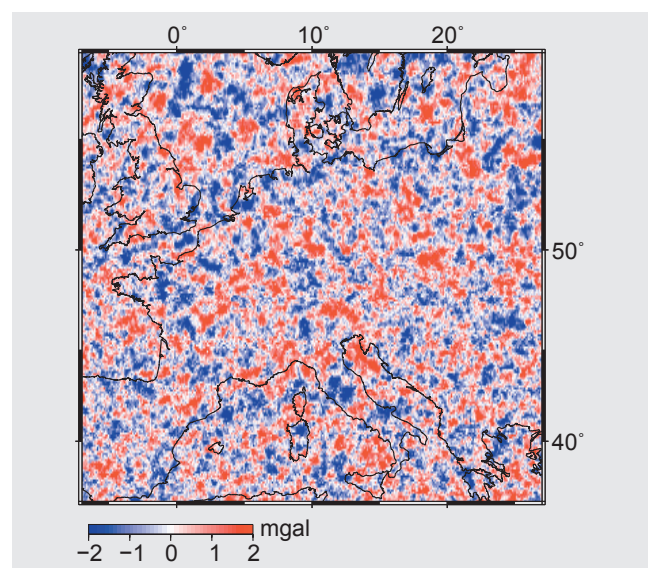


Abb. 8: Synthetisches Rauschen der terrestrischen Daten Δg^T , Szenario 1K (korreliertes Rauschen)

Auf Basis der beiden verschiedenen Rauschscenarien und damit der Fehlergradvarianzfunktionen der terrestrischen Daten ergeben sich zwei Versionen für die spektralen Gewichte (15), wie sie in Abb. 9 dargestellt sind. Beide Kurven unterscheiden sich nur wenig, da bei einer Datenauflösung von $6'$ mit den Fehlergradvarianzen aus (20) eine Restkorrelation für das eigentlich unkorrelierte Rauschen modelliert wird, vgl. Wolf (2006).

Die ursprüngliche und die für die beiden Rauschscenarien modifizierten Kernfunktionen sind in Abb. 10 dargestellt. Durch die Modifikation fallen die Kernfunktionen deutlich schneller auf Null ab, da der langwellige Signalanteil durch das GPM und nicht durch die Integration der terrestrischen Daten beigetragen wird.

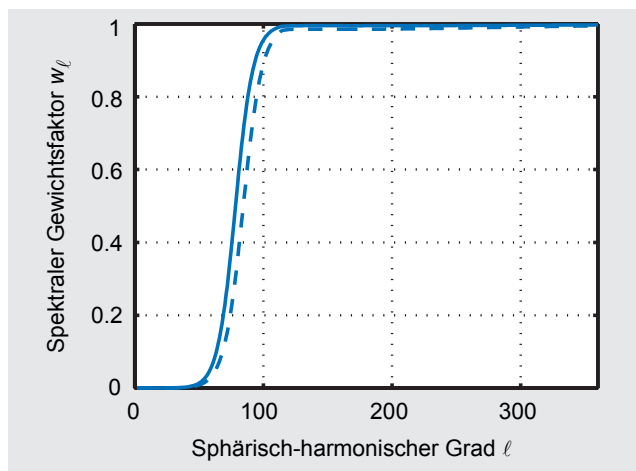


Abb. 9: Spektrale Gewichte für das Szenario 1UK (—) und für das Szenario 1K (---)

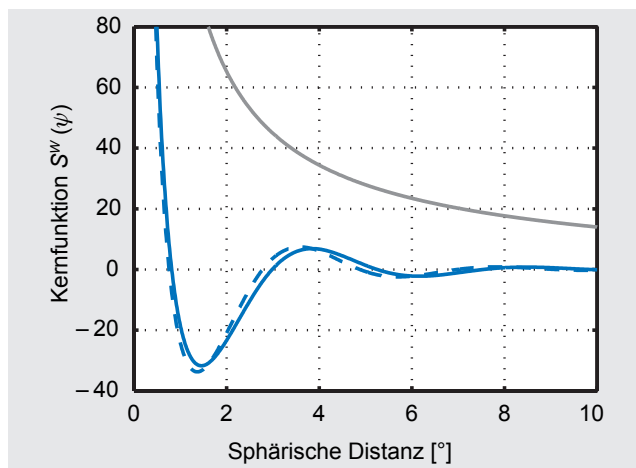


Abb. 10: Kernfunktionen: unmodifiziert (grau, —), modifiziert für das Szenario 1UK (—) und für das Szenario 1K (---)

4.2.2 Variation der Kernabbruchdistanz

In den Testrechnungen wird die Abbruchdistanz ψ_0 der Kernfunktion variiert. Es wird neben einer Kugelkappe mit konstanter Kernabbruchstelle das gesamte Testdaten-gebiet in der Integration verwendet. Dabei verändert sich die Abbruchstelle in Abhängigkeit des Azimuts zwischen Berechnungs- und Quellpunkt. Für Berechnungspunkte am Rand des Gebietes liegt dann ein stark asymmetrisches Einzugsgebiet vor. Auf Basis der synthetischen Daten wird numerisch untersucht, welchen Einfluss die verschiedenen Abbruchvarianten auf das Integrationsergebnis haben. Für die Kugelkappe werden folgende Abbruchstellen der Kernfunktion gewählt:

1. erste Nullstelle (1.N),
2. erstes lokales Minimum (1.Min),
3. zweite Nullstelle (2.N).

Beim Abbruch im ersten lokalen Minimum wird neben der Modifikation (15) nach kleinsten Quadraten zusätzlich die Modifikation (13) nach Meissl eingesetzt.

5 Numerische Ergebnisse

In der numerischen Untersuchung wird zunächst der Einfluss der Korrekturterme g_m aus (3) betrachtet (Abschnitt 5.1). In Abschnitt 5.2 werden die Ergebnisse aus der statistischen Fehlerschätzung angegeben, in Abschnitt 5.3 werden die Soll-Ist-Differenzen für die verschiedenen Testszenarien diskutiert.

5.1 Korrekturterme

Der Einfluss der Korrekturterme g_m aus (3) werden in einem Testszenario ohne Rauschen des GPM und der terrestrischen Daten berechnet, es werden in der Integration (3) rauschfreie residuale Schwereanomalien Δg^R verwendet. Die Kernfunktion wird dennoch im Sinne des Szenarios 1UK modifiziert, um den Vernachlässigungsfehler klein zu halten.

In Tab. 2 ist die Statistik der Beiträge der Korrekturterme g_m der 1. und 2. Ordnung angegeben. Es ergibt sich ein Maximalbetrag von 7.5 cm, die Terme 2. Ordnung sind deutlich kleiner mit einem Maximalbetrag von 0.2 cm. Die Verbesserung, die durch die Berücksichtigung der Korrekturterme erzielt wird, ist in der Statistik der Soll-Ist-Differenzen in den beiden unteren Zeilen in Tab. 2 zu finden. Die Maximaldifferenz von 10.4 cm wird auf 4.2 cm reduziert. Auch die Standardabweichung des Mittelwertes der Differenzen wird um 60 % gesenkt.

In den Abb. 11 und 12 sind jeweils die Soll-Ist-Differenzen der Lösung unter Vernachlässigung der Korrekturterme und unter ihrer Berücksichtigung dargestellt. Die Verbesserung in den Hochgebirgsregionen wie den Alpen aber auch in den Pyrenäen ist deutlich zu erkennen.

Tab. 2: Statistik der Beiträge der Korrekturterme g_1 und g_2 zur Quasigeoidlösung und der Soll-Ist-Differenzen ohne und mit Berücksichtigung der Korrekturterme, Einheit cm

	Mtw	Std	Min	Max
Beiträge der Korrekturterme				
g_1	-0.1	0.8	-3.6	7.5
g_2	-0.0	0.0	-0.2	0.2
Soll-Ist-Differenzen				
ohne g_1, g_2	-0.1	1.0	-5.0	10.4
mit g_1, g_2	-0.0	0.4	-2.9	4.2

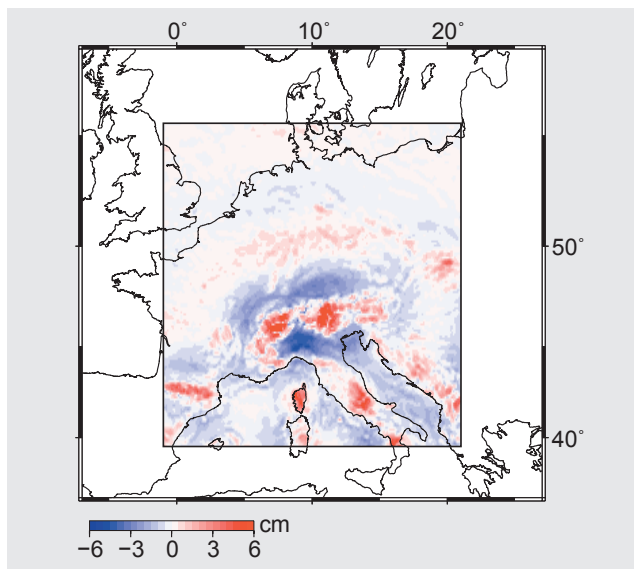


Abb. 11: Soll-Ist-Differenzen im Szenario ohne Rauschen unter Vernachlässigung der Korrekturterme g_m

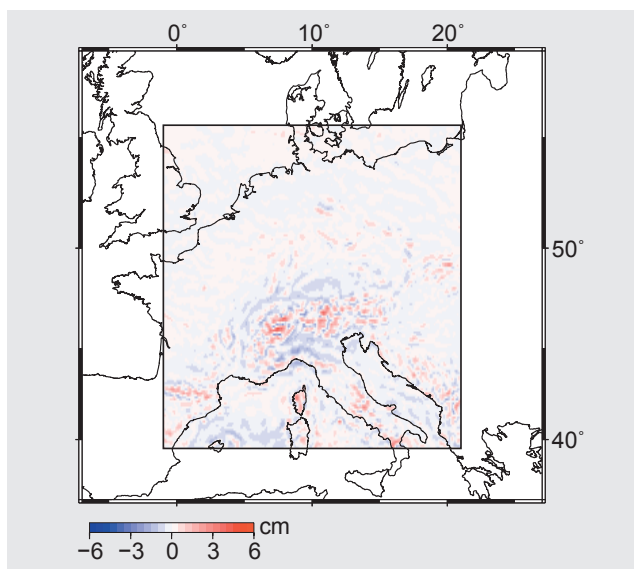


Abb. 12: Soll-Ist-Differenzen im Szenario ohne Rauschen unter Berücksichtigung der Korrekturterme g_m bis zu 2. Ordnung

5.2 Statistische Fehlerabschätzung

In der statistischen Fehlerabschätzung wird die Gleichung (16) für verschiedene Abbruchdistanzen ψ_0 in beiden Rauschszenerarien (1UK, 1K) ausgewertet. In Abb. 13 sind die Vernachlässigungsfehler σ_O für wachsende Abbruchdistanzen im Szenario 1UK aufgetragen. Wie erwartet, zeigen sich lokale Minima in der Fehlerfunktion (rot) an den Nullstellen der Kernfunktion (blau). Die Verbesserung, die durch die zusätzliche Modifikation nach Meissl (grün) erreicht werden kann, ist deutlich zu erkennen.

In Tab. 3 sind die einzelnen Fehlerbeiträge für ausgewählte Abbruchdistanzen für beide Rauschszenerarien angegeben.

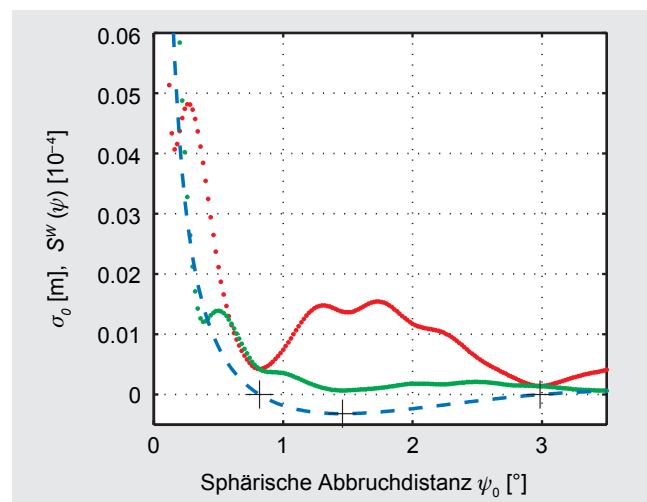


Abb. 13: Vernachlässigungsfehler σ_O im Szenario 1UK; Modifikation (15) in rot, mit zusätzlicher Modifikation (13) nach MEISSEL in grün; die Kernfunktion $S^W(\psi)$ ist normiert mit dem Faktor 10^{-4} in blau (gestrichelt) dargestellt, Nullstellen und erstes lokales Minimum sind markiert (+).

Tab. 3: Standardabweichungen aus der statistischen Fehlerabschätzung, Einheit cm. Die verschiedenen Fehlerbeiträge aus (16) sind aufgeführt.

ψ_0	$\sigma_{\varepsilon M}$	$\sigma_{\varepsilon T}$	σ_O	σ_{ζ}
Szenario 1UK				
1.N	3.1	1.7	0.4	3.5
1.MIN	3.0	1.6	1.4	3.7
1.MIN & MEISSEL	1.4	1.9	0.1	2.4
2.N	1.0	1.6	0.1	1.9
180°	0.5	1.6	0.0	1.7
Szenario 1K				
1.N	3.6	2.2	0.5	4.3
1.MIN	3.6	2.2	1.6	4.5
1.MIN & MEISSEL	1.9	2.6	0.1	3.2
2.N	1.3	2.4	0.1	2.7
180°	0.8	2.4	0.0	2.5

Auch hier wird deutlich, dass eine Vergrößerung des Integrationsgebietes nicht immer zu einer besseren Genauigkeit führt. Der Abbruch im ersten (lokalen) Minimum der Kernfunktion ist durch den abrupten Sprung auf Null ungünstig. Hier wird durch die Modifikation nach Meissl eine Verbesserung von 30 bis 35% erreicht. Bei einer (theoretischen) Integration über die gesamte Erde ($\psi_0 = 180^\circ$) ergeben sich Standardabweichungen der Quasigeoidhöhe von 1.7 cm (1UK) und 2.5 cm (1K). Wird die Kernfunktion konstant in der zweiten Nullstelle abgebrochen, werden bereits ähnlich gute Werte von 1.9 cm (1UK) und 2.7 cm (1K) erreicht. Eine Fehlerabschätzung für die Integration bei Nutzung des Gesamtgebietes kann aufgrund der dann variierenden Abbruchdistanzen nicht auf diesem Weg durchgeführt werden. Es zeigt sich, dass die Standardabweichung in diesem Fall mindestens dem Wert entspricht, der sich bei konstantem Abbruch der

Kernfunktion in der zweiten Nullstelle ergibt, oder noch etwas besser ist.

5.3 Qualitätsanalyse für verschiedene Testszenarien

In der numerischen Auswertung der Integration nach (3) werden ebenfalls die verschiedenen Abbruchdistanzen (1.N, 1.Min, 2.N und Nutzung des Gesamtgebietes) der Kernfunktion für beide Rauschsznarien untersucht.

In den Abb. 14 bis 17 sind die Soll-Ist-Differenzen für einen konstanten Kernabbruch in der ersten Nullstelle, im ersten lokalen Minimum ohne und mit der Modifikation nach Meissl und in der zweiten Nullstelle angegeben. Die Verbesserung durch die Modifikation nach Meissl ist deutlich zu erkennen, das Ergebnis für den Abbruch in der zweiten Nullstelle ist aufgrund des größeren Integra-

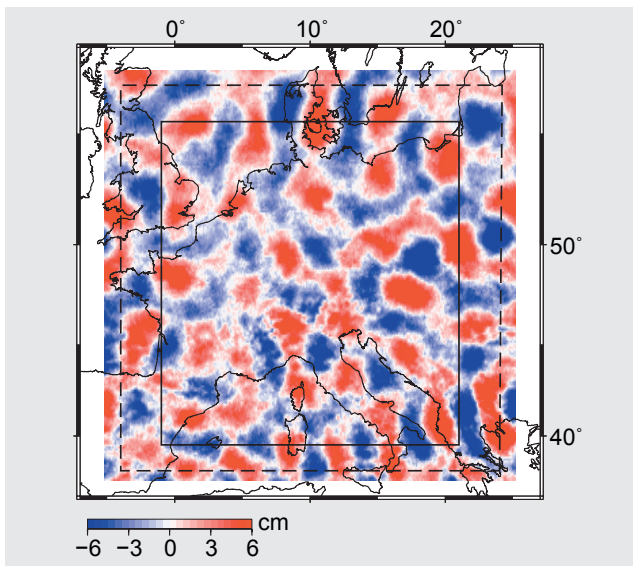


Abb. 14: Soll-Ist-Differenzen im Szenario 1UK, 1.N. Markiert sind die Randbereiche entsprechend 1.Min (gestrichelt), 2.N (durchgezogen).

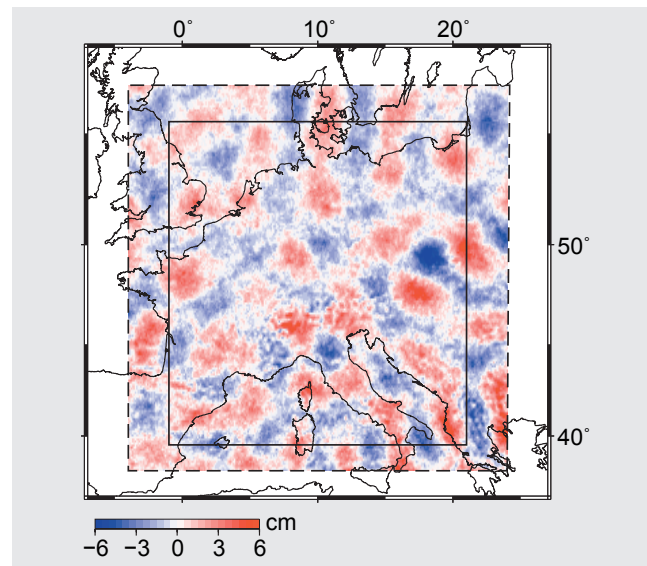


Abb. 16: Soll-Ist-Differenzen im Szenario 1UK, 1.Min & MEISSL

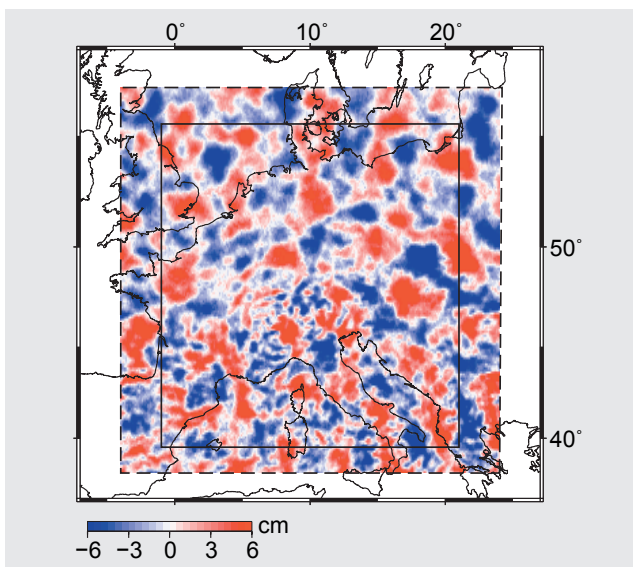


Abb. 15: Soll-Ist-Differenzen im Szenario 1UK, 1.Min

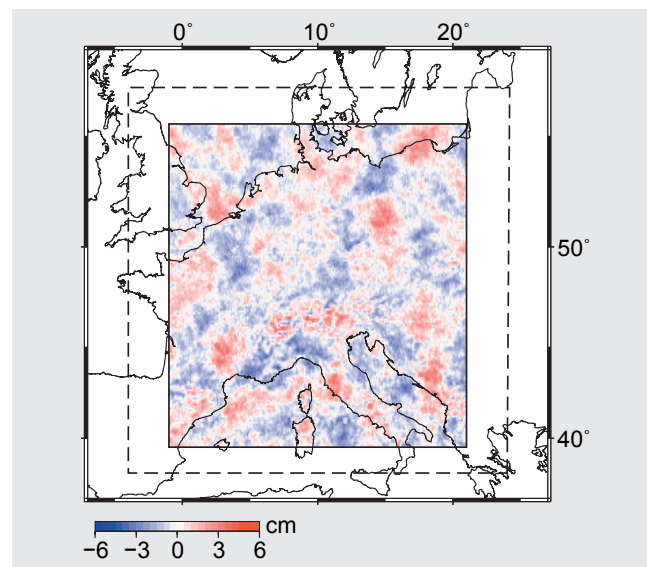


Abb. 17: Soll-Ist-Differenzen im Szenario 1UK, 2.N

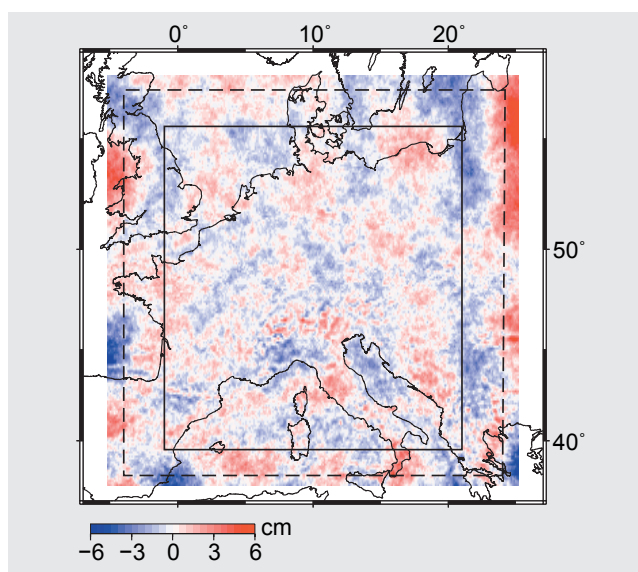


Abb. 18: Soll-Ist-Differenzen im Szenario 1UK

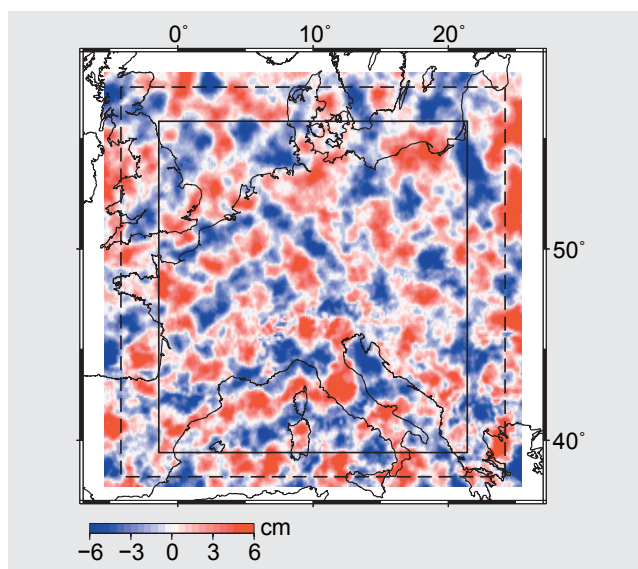


Abb. 19: Soll-Ist-Differenzen im Szenario 1K

tionsgebietes bei Erhalt einer günstigen Abbruchstelle noch besser. Eine weitere Verbesserung wird erzielt, wenn die Kernfunktion nicht konstant abgebrochen wird, sondern stets das gesamte Datengebiet verwendet wird, die Soll-Ist-Differenzen sind in Abb. 18 dargestellt.

Für diesen Berechnungsfall sind für den Vergleich mit den verschiedenen Lösungen bei konstantem Abbruch der Kernfunktion drei unterschiedlich große Evaluierungsgebiete gewählt worden, entsprechend dem Abbruch an den Stellen 1.N, 1.Min oder 2.N. Die Ränder dieser Gebiete sind jeweils in den Abbildungen eingezeichnet. Die Soll-Ist-Differenzen für das Szenario 1K unter Verwendung des gesamten Datengebietes in der Integration sind in Abb. 19 dargestellt. Sie fallen deutlich größer als die Differenzen im Szenario 1UK aus.

Die Statistik der Soll-Ist-Differenzen sind in Tab. 4 angegeben.

Tab. 4: Statistik der Soll-Ist-Differenzen der Quasigeoidlösung in den beiden Rauschszenerarien 1UK und 1K, Einheit cm. Die Abkürzungen kennzeichnen die verschiedenen Abbruchdistanzen der Kernfunktion, bei Nutzung des Gesamtgebietes (Gebiet) die Größe des Evaluierungsgebietes.

ψ_0	Mtw	Std	Min	Max
Szenario 1UK				
1.N	0.1	3.3	-12.1	12.9
1.MIN	-0.0	3.3	-12.6	13.7
1.MIN & MEISL	0.1	1.7	-6.8	7.3
2.N	-0.1	1.2	-4.7	4.6
Gebiet 1.N	-0.0	1.3	-7.0	7.5
Gebiet 1.MIN	-0.1	1.1	-4.7	6.2
Gebiet 2.N	-0.1	1.0	-4.4	4.9
Szenario 1K				
1.N	0.2	4.5	-17.8	18.6
1.MIN	0.0	4.6	-19.4	20.4
1.MIN & MEISL	0.2	3.3	-13.3	14.3
2.N	-0.2	2.7	-8.0	10.5
Gebiet 1.N	-0.0	2.8	-10.9	9.4
Gebiet 1.MIN	-0.0	2.7	-9.8	9.4
Gebiet 2.N	-0.1	2.7	-8.6	9.4

Tab. 5: Statistik der Soll-Ist-Differenzen (Gebiet 2.N, vgl. Tab. 4) unter Vernachlässigung der Korrekturterme g_1 und g_2 , Einheit cm

Szenario	Mtw	Std	Min	Max
1UK	-0.2	1.4	-6.5	9.6
1K	-0.2	2.8	-9.3	10.1

Hier wird noch einmal der positive Einfluss der Meissl-Modifikation deutlich, die Standardabweichung sinkt von 3 cm auf knapp 2 cm bzw. von knapp 5 cm auf 3 cm.

Bei Nutzung des gesamten Eingangsdatengebietes ist die Lösung stets besser als bei konstantem Abbruch der Kernfunktion. Die Lösung bei Abbruch der Kernfunktion in der 2. Nullstelle erreicht aber nahezu dieselbe Genauigkeit. Vorteil des konstanten Abbruchs der Kernfunktion ist eine Verringerung der Rechenzeit um etwa 30 %. In Anbetracht der Gesamtzeiten von nur einigen Minuten sollte aber die (bessere) Lösung unter Nutzung des Gesamtgebietes bevorzugt werden.

Im Fall von korreliertem Rauschen der terrestrischen Daten ergeben sich deutlich höhere Differenzen. Hier wird maximal eine Standardabweichung von 2.7 cm erreicht gegenüber 1.0 cm bei unkorreliertem Rauschen.

Die Beiträge der Korrekturterme g_1 und g_2 erreichen ähnliche Werte, wie in Abschnitt 5.1 dargestellt. Die Ver-

besserung durch Berücksichtigung der Korrekturterme ist beim Szenario mit korreliertem Rauschen weniger deutlich (7 % für den Maximalwert) als im Szenario mit unkorreliertem Rauschen (49 % für den Maximalwert), vgl. Tab. 4 und 5.

Der Vergleich der Statistik der Soll-Ist-Differenzen mit den Ergebnissen der statistischen Fehlerschätzung zeigt, dass im Fall von unkorreliertem Rauschen, die statistische Schätzung etwa im Bereich von 6 % bis 40 % zu pessimistisch ist und im Fall von korreliertem Rauschen Abweichungen in den Standardabweichungen von kleiner 10 % auftreten. Eine geringe Abweichung kann verbleiben, da die Standardabweichung der Soll-Ist-Differenzen auf einem regional begrenztem Gebiet basiert, die Standardabweichung auf Basis der Gradvarianzen als global gültiges Maß abgeschätzt wird. Die größeren Abweichungen im Fall des unkorrelierten Rauschen erklären sich dadurch, dass mit der Modellierung der Fehlergradvarianzen nach (20) eine Restkorrelation verbleibt und dies zu einem pessimistischeren Ergebnis bei der statistischen Abschätzung führt, siehe auch Wolf (2006).

6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde die Quasigeoidberechnung auf Basis der spektralen Kombination eines GPM und terrestrischen Schweredaten evaluiert. Die spektralen Gewichte basieren auf dem Ansatz nach kleinsten Quadraten. Durch Nutzung synthetischer Daten (mit unkorreliertem und korreliertem Rauschen) wurde der Effekt des Kernabbruchs anhand von Soll-Ist-Differenzen numerisch untersucht und bewertet. Die beste Lösung wurde erreicht, wenn die Kernfunktion nicht an konstanter Stelle abgebrochen wird, sondern wenn stets das gesamte Datengebiet verwendet wird. Die Lösung mit Abbruch der Kernfunktion in der 2. Nullstelle erreicht eine nur wenig schlechtere Qualität.

Durch die zusätzliche Modifikation nach Meissl wurde bei Abbruch im ersten lokalen Minimum der Kernfunktion eine Verbesserung der Standardabweichung von 30 % bis 35 % erreicht.

Der Einfluss der Korrekturterme g_m in der Quasigeoidlösung nach Molodenskii wurde mit maximal 7.5 cm (g_1) bzw. 0.2 cm (g_2) in Hochgebirgsregionen beziffert. Dabei liegen die synthetischen Daten spektral begrenzt vor, so dass diese RTM-reduzierten realen Schwereanomalien entsprechen. Bei höherfrequentem Signalinhalt dürfte der Korrekturbeitrag weiter ansteigen. Durch Erhöhung der Datenauflösung könnte eine weitere Verbesserung bei der Bestimmung der Korrekturterme erreicht werden. Es sollte dann geprüft werden, ob bei spektral begrenztem Signalinhalt der Schwereanomalien bereits eine Verfeinerung des DGM ausreicht. Im Szenario mit korreliertem Rauschen fällt die Verbesserung durch die Berücksichtigung der Korrekturterme weniger deutlich aus.

Die Soll-Ist-Differenzen werden von der statistischen Fehlerabschätzung auf Basis von Gradvarianzen bestätigt. Im Szenario mit unkorreliertem Rauschen ergeben sich pessimistischere Genauigkeitsangaben. Dies kann durch die verbleibende Restkorrelation bei der Modellierung der Fehlergradvarianzen erklärt werden. Bei korreliertem Rauschen treten Abweichungen in den Standardabweichungen von kleiner 10 % auf. In der Simulation wird eine Standardabweichung von 1 cm (unkorreliertes Rauschen) bzw. knapp 3 cm (korreliertes Rauschen) für die Quasigeoidlösung erreicht.

Literatur

- Agren, J.: Regional Geoid Determination Methods for the Era of Satellite Gravimetry – Numerical Investigations Using Synthetic Earth Gravity Models. Dissertation, Royal Institute of Technology, Department of Infrastructure, Stockholm, 2004. <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:kth:diva-55> (15.12.2006).
- de Min, E.: De Geoïde voor Nederland. Dissertation, Technische Universiteit Delft, The Netherlands, 1996.
- Denker, H.: Computation of Gravity Gradients Over Europe For Calibration/Validation of GOCE Data. In: I.N. Tziavos, (Hrsg.), Proc IAG International Symposium »Gravity and Geoid«, Thessaloniki, Greece, Aug 26 - 30, 2002, S. 287–292. Zeta Publ., 2003.
- Denker, H. und Tziavos, I.N.: Investigation of the Molodenskii Series Terms for Terrain Reduced Gravity Field Data. Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata, 40(3–4): 195–203, 1999.
- Featherstone, W.E.: Software for Computing Five Existing Types of Deterministically Modified Integration Kernel for Gravimetric Geoid Determination. Computers & Geosciences, (29): 183–193, 2003.
- Forsberg, R. und Sideris, M.G.: On Topographic Effects in Gravity Field Approximation. In: E. Keilso, K. Poder, und C.C. Tscherning, (Hrsg.), Festschrift to Torben Krarup, Band 58, S. 129–148. Geodaetisk Institut, Kopenhagen, Denmark, 1989.
- Forsberg, R. und Tscherning, C.C.: The Use of Height Data in Gravity Field Approximation by Collocation. J Geophys Research, 86(B9): 7843–7854, 1981.
- Gerlach, C.: Zur Höhensystemumstellung und Geoidberechnung in Bayern. Dissertation, Nr. 571 in Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Technische Universität München, 2003.
- GFZ: Combined Gravity Field Model EIGEN-GL04C, 2006. http://www.gfz-potsdam.de/GRACE/results/grav/g005_eigen-gl04c.html (25.10.2006).
- Haagmans, R., de Min, E. und van Gelderen, M.: Fast Evaluation of Convolution Integrals on the Sphere Using 1D FFT, and a Comparison with Existing Methods for Stokes' Integral. Man Geod, 18: 227–241, 1993.
- Heck, B.: Zur lokalen Geoidbestimmung aus terrestrischen Messungen vertikaler Schweregradienten. Dissertation, Universität Karlsruhe, Nr. 259 in Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, München, 1979.
- Heck, B.: An Evaluation of Some Systematic Error Sources Affecting Terrestrial Gravity Anomalies. Bull Géod, 64: 88–108, 1990.
- Heck, B. und Grüniger, W.: Zur Genauigkeit gravimetrisch bestimmter absoluter und relativer Geoidhöhen. Reihe A97, DGK, München, 1983.
- Heck, B. und Grüniger, W.: Modification of Stokes' Integral Formula by Combining two Classical Approaches. In: Advances in Gravity Field Modelling, Proceedings XIX General Assembly, IAG Symposia, Vancouver, Canada, August 10–22, 1987, S. 319–337, 1987.
- Heiskanen, W.A. und Moritz, H.: Physical Geodesy. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1. Auflage, 1967.
- Meissl, P.: Preparations for the Numerical Evaluation of Second Order Molodenskii-type Formulas. OSU Rep 163, 1971.

- Molodenskii, M. S., Eremeev, V. F. und Yurkina, M. I.: Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1962.
- Moritz, H.: Integral Formulas and Collocation. *Man Geod*, 1: 1–40, 1976.
- Moritz, H.: Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1980.
- Paul, M. K.: A Method of Evaluating the Truncation Error Coefficients for Geoidal Height. *Bull Géod*, 110: 413–425, 1973.
- Rapp, R. H. und Rummel, R.: Methods for the Computation of Detailed Geoids and their Accuracy. OSU Rep 233, 1975.
- Sideris, M. G.: Spectral Methods for the Numerical Solution of Molodensky's Problem. UCSE Rep 20024, Department of Surveying Engineering, University of Calgary, 1987.
- Sjöberg, L. E.: Least-Squares Combination of Satellite and Terrestrial Data in Physical Geodesy. *Ann. Géophys.*, 1: 25–30, 1981.
- Sjöberg, L. E.: Least Squares Modification of Stokes' and Vening Meinesz' Formulas by Accounting for Truncation and Potential Coefficient Errors. *Man Geod*, 9: 209–229, 1984.
- Tscherning, C. C. und Rapp, R. H.: Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations, and Deflections of the Vertical Implied by Anomaly Degree Variance Models. OSU Rep 208, 1974.
- Weber, G. und Wenzel, H.-G.: Error Covariance Functions of Sea Gravity Data and Implications for Geoid Determination. *Marine Geodesy*, 75(1–4): 199–226, 1983.
- Wenzel, H.-G.: Zur Geoidbestimmung durch Kombination von Schwereanomalien und einem Kugelfunktionsmodell mit Hilfe von Integralformeln. *ZfV*, 3: 102–111, 1981.
- Wenzel, H.-G.: Schwerefeldmodellierung durch ultra hochauflösende Kugelfunktionsmodelle. *ZfV*, 124(5): 144–154, 1999.
- Wenzel, H.-G. und Arabelos, D.: Zur Schätzung von Anomalie-Gradvarianzen aus lokalen Kovarianzfunktionen. *ZfV*, 106(5): 234–243, 1981.
- Wolf, K. I.: Considering Coloured Noise of Ground Data in an Error Study for External GOCE Calibration/Validation. In: P. Knudsen, J. Johannessen, T. Gruber, S. Stammer, und T. van Dam, (Hrsg.), *Proc GOCINA Workshop*, April, 13–15, 2005, Band 25, Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie, S. 85–92. Luxembourg, 2006.
- Wolf, K. I.: Kombination globaler Potentialmodelle mit terrestrischen Schweredaten für die Berechnung der zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials in Satellitenbahnhöhe. Dissertation, Nr. 264 in *Wiss Arb Uni Hannover*, Institut für Erdmessung, Leibniz Universität Hannover, 2007.
- Wolf, K. I. und Kieler, B.: Error Evaluation for Regional Geoid Computation Using Varying Integration Cap Sizes in a Synthetic Environment. In: *Proc IAG First International Symposium of the International Gravity Field Service*, 28. Aug – 1. Sept 2006, Istanbul, Turkey, S. 19–24. Harita Dergisi, Turkey, 2007.
- Wong, L. und Gore, R.: Accuracy of Geoid Heights from Modified Stokes Kernels. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 18(1): 81–91, 1969.

Anschrift der Autorin

Dr.-Ing. Karen Insa Wolf
Institut für Erdmessung (IfE)
Leibniz Universität Hannover
Schneiderberg 50, 30167 Hannover
wolf@ife.uni-hannover.de