

# Multilevel B-Spline Approximation zur Modellierung von Geschwindigkeitsfeldern

Andre Nuckelt

## Zusammenfassung

Die Bestimmung eines gleichmäßigen Geschwindigkeitsfeldes aus ungleichmäßig verteilten GPS-Stationen entspricht der Problemstellung der *Scattered Data Approximation* durch Freiformflächen. Mit dem Verfahren der *Multilevel B-Spline Approximation* wird ein geeignetes Werkzeug vorgestellt, um diese Aufgabe zu lösen. Durch eine iterative Generierung von Approximationsflächen wird eine bestmögliche Anpassung an die Stationsgeschwindigkeiten erreicht. Der Vergleich mit dem verbreiteten Ansatz der Kollokation unterstreicht die Vorteile dieses Approximationsverfahrens.

## Summary

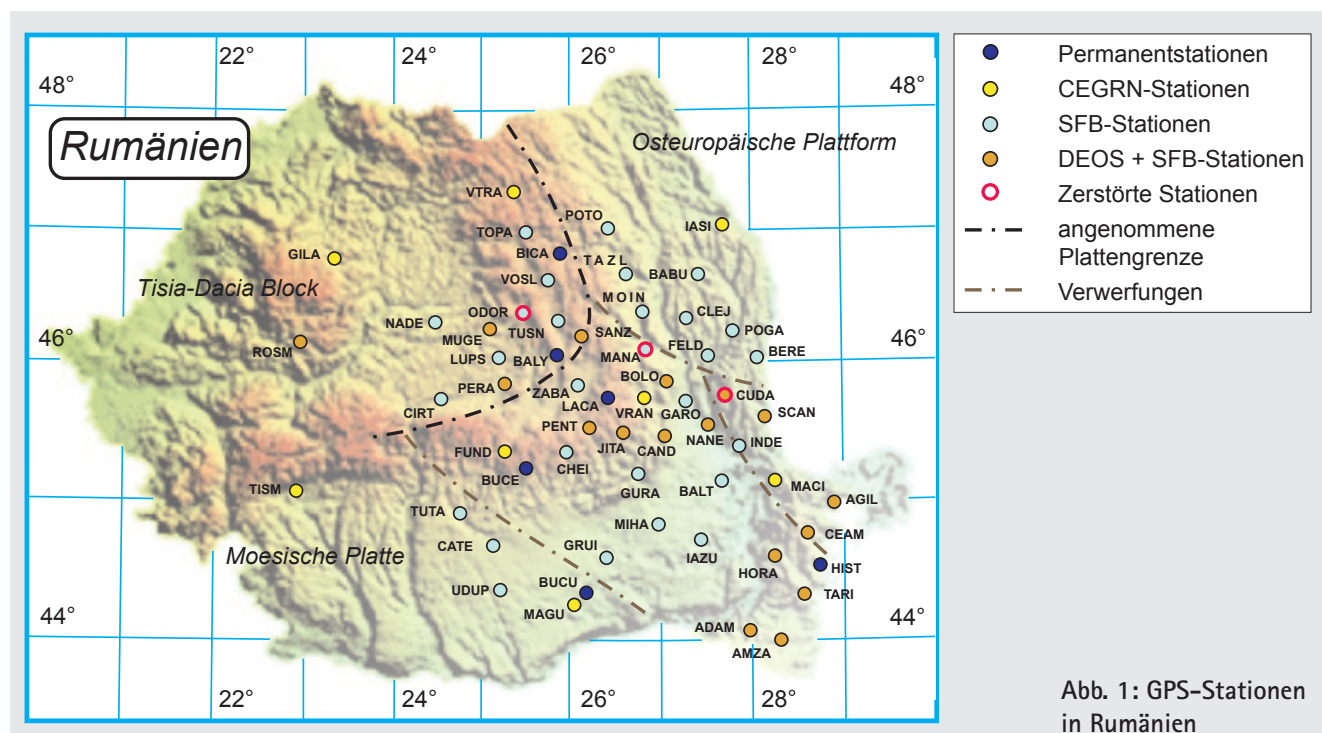
The estimation of regular velocity fields from irregular distributed GPS stations corresponds to the problem of scattered data approximation with free form surfaces. The method of Multilevel B-Spline Approximation is a powerful tool to solve this problem. The iterative evaluation of approximation surfaces leads to a best fit approximation of the station velocities. The comparison with the very common collocation method emphasises the advantages of the Multilevel B-Spline Approximation method.

## 1 Einleitung

Die Bestimmung dreidimensionaler Bewegungen und Deformationen der Erdkruste kann durch die Beobachtung eines GPS-Überwachungsnetzes erfolgen. Im geodätischen Teilprojekt B1 »Dreidimensionale Plattenkinematik in Rumänien« des Sonderforschungsbereiches 461 »Starkbeben – von geowissenschaftlichen Grundlagen zu Ingenieurmaßnahmen« sind zwischen 1997 und 2003 ca. 60 Stationen in Rumänien eingerichtet worden (Abb. 1). Aus den Beobachtungen von bis dato 14 Messkampagnen können die Bewegungen dieser Stationen geschätzt werden.

Üblicherweise ist die Verteilung der GPS-Stationen sehr unregelmäßig, so dass mittels geeigneter Interpolations- oder Approximationsverfahren ein gleichmäßiges Raster bzw. eine kontinuierliche Fläche generiert wird, um geodynamische Analysen anschließen zu können.

Ein verbreitetes Verfahren zur Generierung eines Geschwindigkeitsfeldes ist die Kollokation mit empirisch bestimmter Korrelationsfunktion (Straub 1996, Peter 2001, Legrand et al. 2006). Dabei werden wiederum lediglich diskrete Punkte berechnet. Für die Berechnung einer



kontinuierlichen Fläche sind Freiformflächen am zweckmäßigsten. Zur Modellierung von Deformationsmessungen sind Bezier-Splines (Wälder 2005) und NURBS (*non uniform rational B-Splines*) (Grimm-Pitzinger und Rudig 2005) bereits vorgestellt worden.

Um der ungleichmäßigen Verteilung der Daten aufgrund der Lage der GPS-Stationen bei der Generierung der Freiformflächen Rechnung zu tragen, sind die Verfahren der *Scattered Data Approximation* besser geeignet.

## 2 Scattered Data Approximation

Für ungleichmäßig verteilte Daten (*scattered data*) ergibt sich nach Hoschek und Lasser (1992) folgendes Interpolationsproblem: für gegebene Abszissen  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1(1)N$  mit zugehörigen Messwerten  $z_i$  wird eine Funktion  $f(\mathbf{x}) = f(x, y)$  gesucht, so dass gilt  $z_i = f(x_i, y_i)$ . Dieses Problem kann als (*weighted*) *least-squares*-Problem oder als *smoothing*-Problem behandelt und gelöst werden. Weit verbreitet sind die Ansätze mit Radialen Basisfunktionen (Buhmann 2000, Wendland 2005). Der zu findende Interpoland hat die Gestalt:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i R(d_i(\mathbf{x})) + p_m(\mathbf{x}) \quad (1)$$

mit

$$p_m(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \beta_j p_j(\mathbf{x}).$$

Die univariaten Basisfunktionen  $R(d_i(\mathbf{x}))$  sind durch radial positive Funktionen in Abhängigkeit des Abstandes  $d_i(\mathbf{x})$  des Punktes  $\mathbf{x} = (x, y)$  zum Interpolationspunkt  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$  im Parameterraum gegeben,  $p_j(\mathbf{x})$  sind Polynome vom Grad kleiner gleich  $m$  und  $p_j(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}(\mathbf{x})$ .

Die unbekannten Koeffizienten ergeben sich aus der Interpolationsforderung  $f(\mathbf{x}_i) = f_i$ , durch die radialen Basisfunktionen wird dabei eine Gewichtung erreicht.

In dieser Arbeit soll nun ein weiterer Ansatz vorgestellt werden, bei dem das Interpolationsproblem mittels hierarchischer *B-Spline Approximation* gelöst wird.

## 3 Approximation mit Multilevel B-Splines

Der folgende Ansatz wurde erstmals von Lee et al. (1997) publiziert und ist mehrfach erfolgreich adaptiert worden (Hjelle 2001, Weis und Lewis 2001).

### 3.1 B-Spline Approximation

In einem rechteckigen Gebiet  $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq n\}$  sind die Punkte  $P = \{(x_c, y_c, z_c)\}$  ungleichmäßig verteilt. Es wird eine Approximationsfunktion  $f$

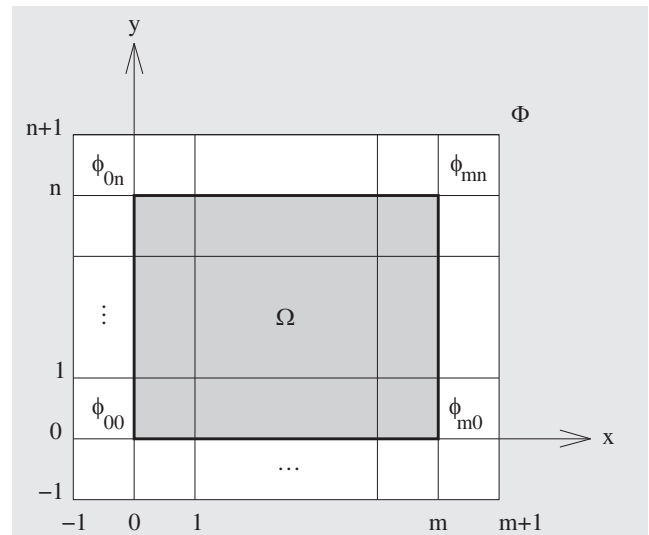


Abb. 2: Konfiguration des Kontrollgitters

dieser Daten als eine gleichmäßige bikubische B-Spline Funktion definiert, die das Gebiet  $\Omega$  mit einem Kontrollgitter  $\Phi$  überlagert (siehe Abb. 2).

Das Kontrollgitter ist ein Set von  $(m+3) \times (n+3)$  Punkten.  $\phi_{ij}$  bezeichnen den  $ij$ -ten Kontrollpunkt des Rasters an der Stelle  $(i, j)$  für  $i = -1, 0, \dots, m+1$  und  $j = -1, 0, \dots, n+1$ . Die Approximationsfunktion  $f$  ist bezüglich der Kontrollpunkte definiert als

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 B_k(s) B_l(t) \phi_{(i+k)(j+l)} \quad (2)$$

mit  $i = \lfloor x \rfloor - 1$ ,  $j = \lfloor y \rfloor - 1$ ,  $s = x - \lfloor x \rfloor$  und  $t = y - \lfloor y \rfloor$ . Die kubischen B-Spline-Funktionen  $B_k$  und  $B_l$  sind definiert als

$$\begin{aligned} B_0(t) &= (1-t)^3/6 \\ B_1(t) &= (3t^3 - 6t^2 + 4)/6 \\ B_2(t) &= (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)/6 \\ B_3(t) &= t^3/6 \end{aligned}$$

mit  $0 \leq t \leq 1$ . Diese Funktionen dienen zur Gewichtung des Einflusses der Kontrollpunkte auf  $f(x, y)$  entsprechend ihres Abstandes zu  $(x, y)$ . Mit dieser Formulierung reduziert sich die Ableitung von  $f(x, y)$  auf die Berechnung der Kontrollpunkte des Rasters  $\Phi$ , die die Datenpunkte  $P$  bestmöglich approximieren.

Zur Bestimmung des Kontrollgitters  $\Phi$  wird zunächst ein Datenpunkt  $(x_c, y_c, z_c)$  betrachtet. Gemäß Gleichung (2) bezieht sich der Funktionswert  $f(x_c, y_c)$  auf die 16 benachbarten Kontrollpunkte. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann  $1 \leq x_c, y_c \leq 2$  angenommen werden. Dann bestimmen die Kontrollpunkte  $\phi_{kl}$  für

1 Der Operator  $\lfloor x \rfloor$ , auch bekannt als Untere Gaussklammer, gibt für die reelle Zahl  $x$  die größte ganze Zahl an, die kleiner oder gleich  $x$  ist.

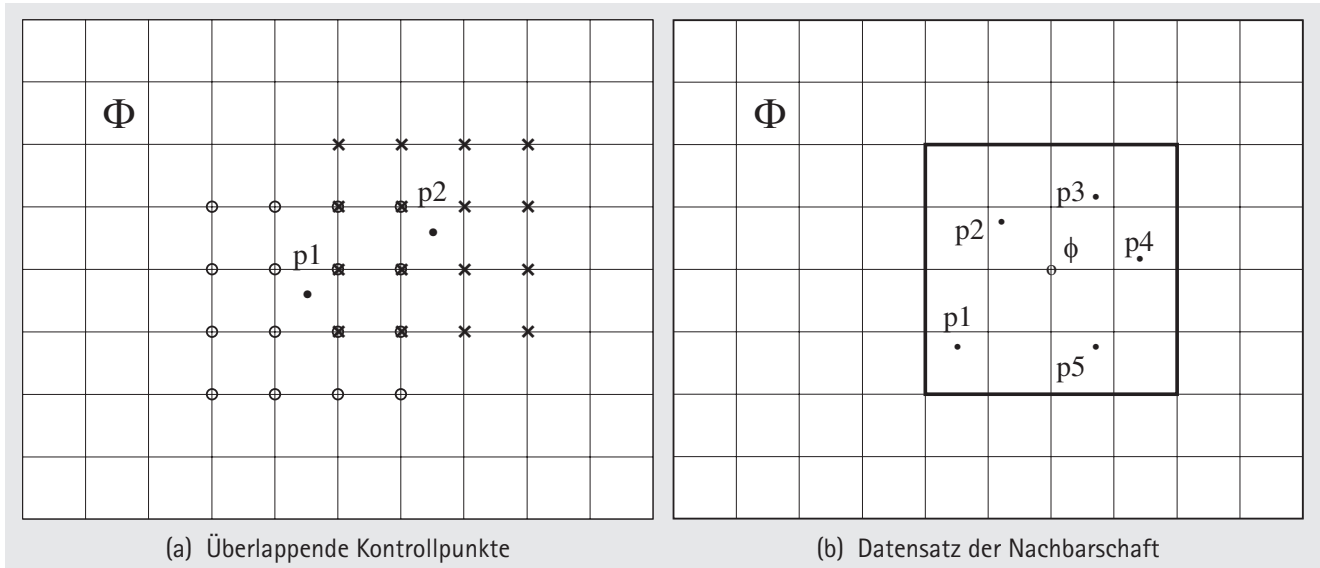


Abb. 3: Lagebeziehungen zwischen Daten- und Kontrollpunkten

$k, l = 0, 1, 2, 3$  die Funktionswerte  $f$  in  $(x_c, y_c)$ . Damit die Funktion  $f$  in  $(x_c, y_c)$  die Werte  $z_c$  annimmt, müssen die Kontrollpunkte  $\phi_{kl}$

$$z_c = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 \omega_{kl} \phi_{kl} \quad (3)$$

erfüllen, wobei  $\omega_{kl} = B_k(s)B_l(t)$  und  $s = x_c - 1, t = y_c - 1$ .

Viele Werte für  $\phi_{kl}$  erfüllen Gleichung (3), deshalb wird im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate  $\sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 \phi_{kl}^2$  minimiert, d.h. die Abweichung von  $f$  über dem Gebiet  $\Omega$  soll null sein. Die Lösung wird erhalten durch

$$\phi_{kl} = \frac{\omega_{kl} z_c}{\sum_{a=0}^3 \sum_{b=0}^3 \omega_{ab}^2}. \quad (4)$$

In dieser Lösung erhalten die Kontrollpunkte in der Nähe von  $(x_c, y_c)$  größere Werte, weil sie auf größere  $\omega_{kl}$  bezogen sind. Die resultierende Funktion  $f$  hat den Wert  $z_c$  an der Stelle  $(x_c, y_c)$  und klingt langsam ab.

Nun werden alle Datenpunkte betrachtet. Für jeden Datenpunkt kann mit Gleichung (4) in seiner Nachbarschaft ein Satz von  $4 \times 4$  Kontrollpunkten erzeugt werden, für entsprechend dicht benachbarte Datenpunkte werden sich diese Nachbarschaften überlagern (Abb. 3a). Durch die unterschiedlichen Werte der Datenpunkte erhalten die sich überlappenden Kontrollpunkte verschiedene Werte. Die multiplen Wertzuweisungen eines Kontrollpunktes werden gelöst, in dem nur Datenpunkte in seiner  $4 \times 4$ -Nachbarschaft einbezogen werden (Abb. 3b).

Mit  $P_{ij}$  wird ein Satz von Datenpunkten bezeichnet, die einen Kontrollpunkt beeinflussen:

$$P_{ij} = \{(x_c, y_c, z_c) \mid i - 2 \leq x_c \leq i + 2, j - 2 \leq y_c \leq j + 2\} \quad (5)$$

Für jeden Punkt  $(x_c, y_c, z_c)$  in  $P_{ij}$  ergibt Gleichung (4) jeweils einen Wert für  $\phi_c$ :

$$\phi_c = \frac{\omega_c z_c}{\sum_{a=0}^3 \sum_{b=0}^3 \omega_{ab}^2} \quad (6)$$

mit  $\omega_c = \omega_{kl} = B_k(s)B_l(t), k = (i + 1) - \lfloor x_c \rfloor, l = (j + 1) - \lfloor y_c \rfloor, s = x_c - \lfloor x_c \rfloor, t = y_c - \lfloor y_c \rfloor$ . Für den Vergleich der unterschiedlichen Werte wird  $\phi_{ij}$  herangezogen, um den Fehler  $e(\phi_{ij}) = \sum_c (\omega_c \phi_{ij} - \omega_c \phi_c)^2$  zu minimieren. Der Term  $(\omega_c \phi_{ij} - \omega_c \phi_c)$  ist die Differenz zwischen tatsächlichem und erwartetem Einfluss von  $\phi_{ij}$  auf die Funktion  $f$  an der Stelle  $(x_c, y_c)$ . Er entspricht somit dem Approximationsfehler von  $\phi_{ij}$  mit der Annahme, dass die Werte der anderen Kontrollpunkte um  $(x_c, y_c, z_c)$  ebenfalls unter Hinzunahme dieses Datenpunktes berechnet wurden. Durch Differentiation von  $e(\phi_{ij})$  nach  $\phi_{ij}$  ergibt sich:

$$\phi_{ij} = \frac{\sum_c \omega_c^2 \phi_c}{\sum_c \omega_c^2}. \quad (7)$$

Nur für die umgebenden Datenpunkte  $P_{ij}$  beeinflusst ein Kontrollpunkt  $\phi_{ij}$  die Funktion  $f$ . Besteht  $P_{ij}$  aus mehreren Punkten, wird eine Kleinste-Quadrate-Lösung gemäß Gleichung (7) ermittelt. Für nur einen Punkt in  $P_{ij}$  wird die Approximation nach Gleichung (4) durchgeführt. Enthält  $P_{ij}$  keine Datenpunkte, bedeutet dies, dass der Kontrollpunkt keinen Einfluss auf  $f(x_c, y_c)$  in irgendeinem Punkt  $(x_c, y_c, z_c)$  in  $P$  hat. Das impliziert, dass  $\phi_{ij}$  einen beliebigen Wert zugewiesen bekommen kann, beispielsweise null oder einen Durchschnittswert aller  $z_c$ , ohne den Approximationsfehler zu beeinflussen.

Dadurch, dass die Kontrollpunktswerte lokal bestimmt werden, wird der Approximationsfehler so minimiert, dass die Funktion  $f$  die Ausgangsdaten richtig wiedergibt. Die Dichte des Kontrollgitters  $\Phi$  beeinflusst die Gestalt der Approximationsfunktion  $f$ . Die Funktion besitzt  $C^2$ -Stetigkeit, denn sie ist eine auf dem Kontrollgitter generierte bikubische B-Spline-Fläche.

### 3.2 Multilevel B-Spline Approximation

Die *B-Spline Approximation* führt zu einem Kompromiss zwischen hoher Genauigkeit und glattem Verlauf der Approximationsfläche. Der Approximationsalgorithmus mit *Multilevel B-Splines* umgeht diesen Kompromiss und ermöglicht sowohl einen glatten Flächenverlauf als auch eine bestmögliche Annäherung an die Datenpunkte. Dieser Algorithmus nutzt hierarchische Kontrollgitter zur Generierung einer Reihe von Funktionen  $f_k$ , deren Summe sich der Approximationsfunktion annähert.

Bei dieser Erweiterung des *B-Spline Approximation*-Algorithmus werden hierarchische Kontrollgitter eingeführt mit der Annahme, dass der Abstand zweier Gitterpunkte mit jeder Hierarchiestufe halbiert wird. Wenn  $\Phi_k$  ein  $(m+3) \times (n+3)$  Kontrollgitter ist, besitzt das nächstdichtere Gitter  $\Phi_{k+1}$   $(2m+3) \times (2n+3)$  Kontrollpunkte, wobei der  $ij$ -te Kontrollpunkt in  $\Phi_k$  mit dem  $(2i, 2j)$ -ten Kontrollpunkt in  $\Phi_{k+1}$  übereinstimmt.

Im ersten Schritt wird der BA-Algorithmus angewandt, um das grösste Kontrollgitter  $\Phi_0$  zu bestimmen. Die resultierende Funktion  $f_0$  ermöglicht eine erste Annäherung, kann jedoch unter Umständen starke Diskrepanzen für die Werte der Datenpunkte aufweisen. Insbeson-

dere liefert  $f_0$  die Abweichung  $\Delta^1 z_c = z_c - f_0(x_c, y_c)$  für jeden Punkt  $(x_c, y_c, z_c)$  in  $P$ . Das nächst dichtere Gitter wird nun benutzt, um die Funktion  $f_1$  zu bestimmen, die die Differenz  $P_1 = (x_c, y_c, \Delta^1 z_c)$  approximiert. Die Summe  $f_0 + f_1$  führt dann zu einer geringeren Abweichung  $\Delta^2 z_c = z_c - f_0(x_c, y_c) - f_1(x_c, y_c)$  für jeden Punkt in  $P$ . Letztendlich wird die Funktion  $f_k$  vom Kontrollgitter  $\Phi_k$  abgeleitet, um  $P_k = (x_c, y_c, \Delta^k z_c)$  zu approximieren mit  $\Delta^k z_c = z_c - \sum_{i=0}^{k-1} f_i(x_c, y_c) = \Delta^{k-1} z_c - f_{k-1}(x_c, y_c)$  und  $\Delta^0 z_c = z_c$ .

Auch die mit dem MBA-Algorithmus ermittelte Funktion  $f$  ist  $C_2$ -stetig, da sie eine Summe von  $C_2$ -stetigen Funktionen ist. Der Verlauf der Funktion ist glatter und genauer als derjenige des BA-Algorithmus.

Die Berechnung von  $f$  erfordert die Bestimmung von  $f_k$  in jeder Hierarchiestufe  $k$ . Durch die Einführung der B-Spline Verfeinerung (Lee et al. 1997) wird der MBA-Algorithmus zusätzlich optimiert und  $f$  nur noch durch eine B-Spline Funktion gebildet. Die B-Spline Verfeinerung wird in jeder Hierarchiestufe durchgeführt.

Ein  $(m+3) \times (n+3)$  Kontrollgitter  $\Phi$  wird jeweils zu einem  $(2m+3) \times (2n+3)$  Kontrollgitter  $\Phi'$ , dessen Punktabstand halb so groß wie bei  $\Phi$ , verfeinert. Sind  $\phi_{ij}$  und  $\phi'_{ij}$  die  $ij$ -ten Kontrollpunkte in  $\Phi$  bzw.  $\Phi'$ , dann ko-  
inzidieren die Positionen von  $\phi'_{2i,2j}$  in  $\Phi'$  und  $\phi_{ij}$  in  $\Phi$ . Die Werte für die Punkte in  $\Phi'$  können aus  $\Phi$  abgeleitet werden:

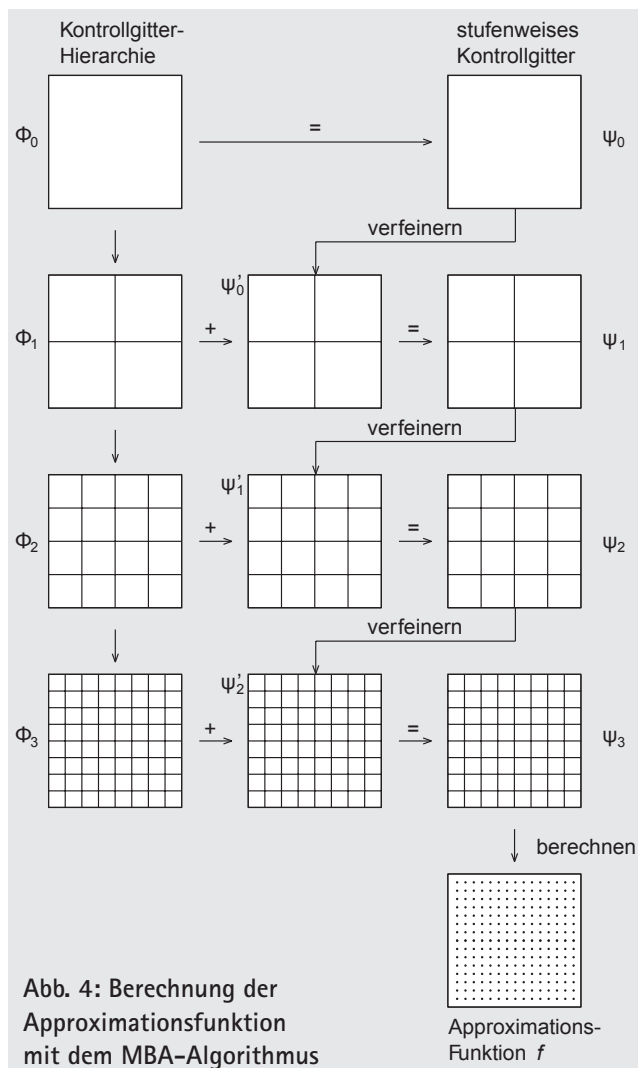
$$\phi'_{2i,2j} = \frac{1}{64} [\phi_{i-1,j-1} + \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i+1,j+1} + 6(\phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j}) + 36\phi_{ij}], \quad (8)$$

$$\phi'_{2i,2j+1} = \frac{1}{16} [\phi_{i-1,j} + \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j+1} + 6(\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1})], \quad (9)$$

$$\phi'_{2i+1,2j} = \frac{1}{16} [\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i+1,j+1} + 6(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j})], \quad (10)$$

$$\phi'_{2i+1,2j+1} = \frac{1}{4} [\phi_{ij} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j+1}]. \quad (11)$$

Um das Kontrollgitter  $\Psi_h$  aus den Punkten  $P$  zu generieren, brauchen nicht mehr alle Elemente von  $\Phi_k, \Psi_k, \Psi'_k$  und  $P_k$  für alle  $k$  gespeichert zu werden. Wenn die B-Spline Approximation und Verfeinerung zusammen für jede Hierarchiestufe angewandt werden, kann  $\Psi_h$  mittels Durchlaufen der Hierarchie vom grössten zum feinsten Kontrollgitter abgeleitet werden. Beim Durchlauf ist nur eine Variable für die Daten und Kontrollgitter notwendig, um die Berechnung durchzuführen und Zwischenergebnisse zu erzeugen. Ein Schema des mit der B-Spline Verfeinerung modifizierten MBA-Algorithmus ist in Abb. 4 dargestellt.





Darin wird nochmal verdeutlicht, dass in jeder Hierarchiestufe eine Approximationsfläche  $\Omega_k$  aus den Werten  $\Delta^k_{z_c}$  berechnet und zu der B-Spline-verfeinerten Approximationsfläche  $\Psi'_{k-1}$  (abgeleitet aus dem Ergebnis der vorherigen Hierarchiestufe) addiert wird, um das Ergebnis  $\Psi_k$  zu erhalten. Mit dem MBA-Algorithmus wird eine Approximationsfunktion  $f$  generiert, die sich an die Datenpunkte  $P$  annähert, jedoch nicht zwangsläufig durch diese verläuft. Durch Wiederaufruf der Funktion  $f_k$  für die Hierarchiestufen  $k > 0$  werden die Restfehler  $\Delta^k_{z_c}$  für jeden Datenpunkt approximiert und beseitigt. Mit einer hinreichenden Bedingung für das Kontrollgitter  $\Phi_k$  kann  $f_k$  derart generiert werden, dass alle Restfehler beseitigt werden können.

### 3.3 Multilevel B-Spline Interpolation

Es sind  $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$  und  $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$  zwei Punkte in  $P_k$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass  $\Phi_k$  den gleichen horizontalen und vertikalen Abstand zwischen zwei Kontrollpunkten besitzt. Der Abstand zwischen  $p_1$  und  $p_2$  wird definiert als  $\max(|\lfloor \frac{x_2}{s} \rfloor - \lfloor \frac{x_1}{s} \rfloor|, |\lfloor \frac{y_2}{s} \rfloor - \lfloor \frac{y_1}{s} \rfloor|)$ , wobei  $s$  dem Abstand der Kontrollpunkte entspricht. Der Abstand entspricht der maximalen Anzahl von horizontalen und vertikalen Gitterlinien in  $\Phi_k$  zwischen  $p_1$  und  $p_2$  nach der Projektion auf die Fläche  $\Omega$ . Dadurch werden die Interpolationseigenschaften bezüglich der Dichte des Kontrollgitters und der Datenverteilung festgelegt.

Der kleinste Abstand zweier Punkte in  $P_k$  wird der Variablen  $d$  zugewiesen. Ist  $d \geq 4$ , liegt kein Kontrollpunkt in der  $4 \times 4$  Nachbarschaft von zwei Datenpunkten. In diesem Fall handelt es sich dann um eine reine Interpolation, da jeder Kontrollpunkt jeweils nur von einem einzigen Datenpunkt abhängt (Abb. 5a). Für  $d < 4$  ist mindestens ein Kontrollpunkt abhängig von zwei Datenpunkten.

In diesem Fall müssen die Einflüsse der beiden Punkte überlagert werden, um den Wert dieses Kontrollpunktes zu ermitteln. Das führt dazu, dass die Funktion  $f_k$  diese Datenpunkte nur noch approximiert (Abb. 5b).

Um diese Interpolationsbedingung zu berücksichtigen, muss das dichteste Kontrollgitter  $\Phi_h$  so fein sein, dass  $d \geq 4$  erfüllt ist.

## 4 Ergebnisse der Approximation

Mit dem vorgestellten MBA-Algorithmus kann aus den Geschwindigkeiten der diskreten Stationen (Abb. 6) ein kontinuierliches Geschwindigkeitsfeld berechnet werden.

Um den Einfluss grober Fehler bzw. von Ausreißern auf das Approximationsverfahren zu zeigen, wurde die fehlerhafte Station LUPS zunächst im Datensatz belassen. Für diese Station wurde eine abweichend große Vertikalgeschwindigkeit von -15 mm/Jahr geschätzt. Für eine zweite Berechnung wurde die Station aus dem Datensatz entfernt.

In Tab. 1 sind die berechneten Kontrollgitter mit den zugehörigen maximalen Abweichungen aufgelistet. Der Schwellwert zum Abbruch der Iteration wurde auf 0.5 mm/Jahr festgelegt. Durch den zusätzlichen Iterationsschritt bei der Variante mit der Station LUPS hat sich die Berechnungszeit nahezu verdoppelt.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Abb. 7 und Abb. 8 visualisiert. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind für ein gleichmäßiges Raster von  $16 \times 16$  Punkten aus den jeweiligen Kontrollgittern die Werte entsprechend Gleichung (2) berechnet worden.

Die generierten Punkte stimmen sehr gut mit den Datenpunkten überein. Der Vergleich von Abb. 7b und Abb. 8b verdeutlicht, dass Ausreißer wie die Station LUPS nur ein sehr begrenztes Gebiet beeinflussen. Jedoch wird

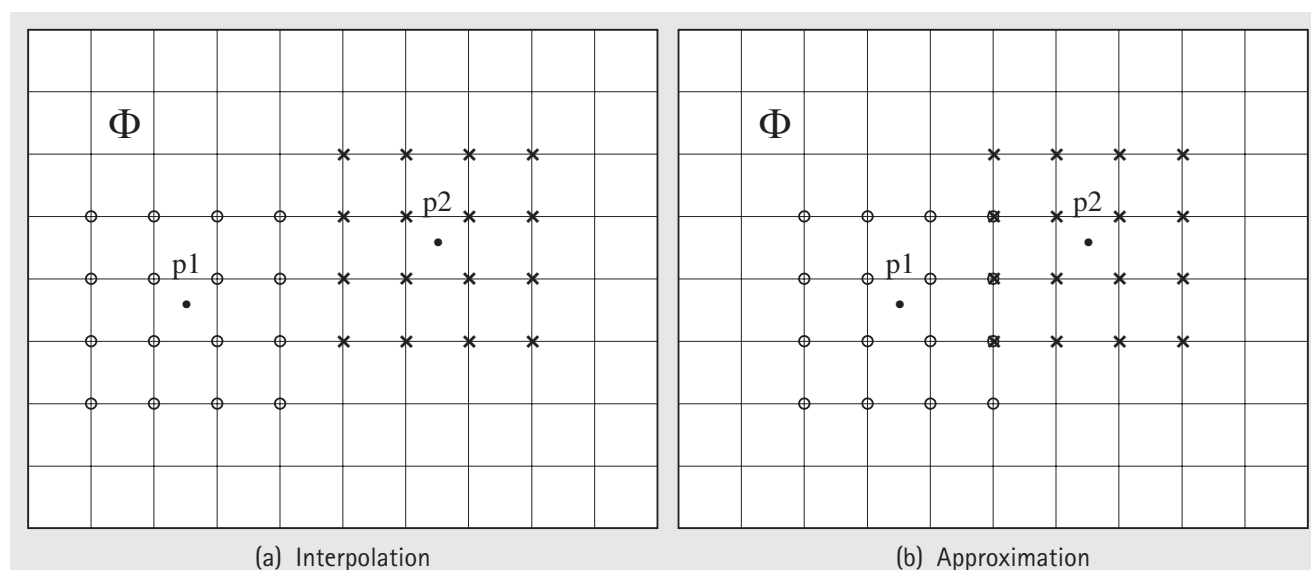


Abb. 5: Beispiele für eine Interpolations- und Approximationssituation

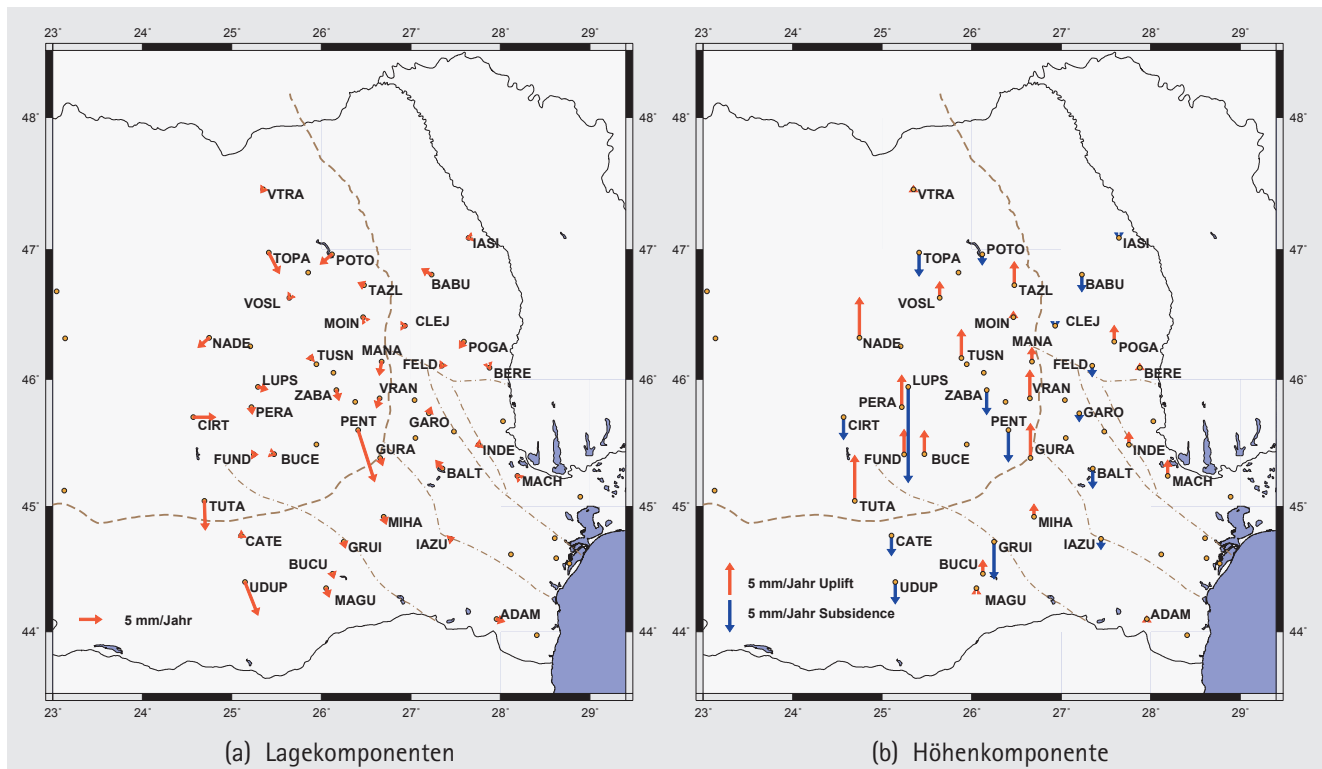


Abb. 6: Ergebnisse der Deformationsanalyse: Geschwindigkeiten der GPS-Stationen

Tab. 1: Vergleich mit und ohne Station LUPS

Gitterweite	max. Abw. [mm/Jahr]	
	mit LUPS	ohne LUPS
4 × 4	15.177	6.930
5 × 5	15.238	6.924
7 × 7	14.738	6.119
11 × 11	11.890	4.686
19 × 19	4.589	1.204
35 × 35	0.750	0.328
67 × 67	0.002	–
Berechnungszeit:	1.2 s	0.7 s

auch gezeigt, dass selbst derartige Situationen, wenn auch unter dem Aufwand weiterer Iterationsschritte, genau approximiert werden können.

## 5 Vergleich mit Kollokation

Für den gleichen Datensatz von GPS-Station ist mit dem Verfahren der Kollokation (Perovic 2005) ebenfalls ein Raster von  $16 \times 16$  Punkten berechnet worden. Ein entscheidender Nachteil tritt bereits zu Beginn der Berechnungen auf: eine geeignete Korrelationslänge  $r_0$  der Korrelationsfunktion

$$f(r_{ij}) = \frac{r_0^2}{r_0^2 + r_{ij}^2} \quad (12)$$

muss bestimmt bzw. festgelegt werden, um in Abhängigkeit vom Abstand zwischen prädictiertem und vorhandenem Punkt zu gewichten. Deswegen wurde die Kollokation, wie auch bei Peter (2001), mit Korrelationslängen von 50 km, 100 km und 150 km durchgeführt. Die besten Ergebnisse wurden für  $r_0 = 50$  km erhalten. Längere Korrelationslängen (größer 50 km) führten dazu, dass die prädictierten Geschwindigkeiten zum Teil doppelt so groß waren wie die Werte an den GPS-Stationen. Ebenfalls wurden wiederum beide Datensätze (mit und ohne LUPS) bei der Kollokation verwendet.

Die Ergebnisse sind in den Abb. 9 und 10 dargestellt. Es sind zum Teil gravierende Unterschiede zwischen den Abb. 9b und 10b aufgrund der Station LUPS feststellbar. Innerhalb eines Radius von 150 km um die Station LUPS sind alle Punkte zum Teil stark beeinflusst. Ebenso spiegelt sich das bereits erwähnte Problem, dass die prädictierten Werte deutlich größer werden als die Originalwerte, in den Abbildungen wider. Diese Effekte sind beim MBA-Algorithmus nicht festzustellen.

Der Vorteil der *Multilevel B-Spline Approximation* liegt darin, dass eine lokal bestanpassende Funktion ermittelt wird, die zudem die Approximationsfläche auch analytisch beschreibt. Nach erfolgter Bestimmung der notwendigen Kontrollpunkte, deren Anzahl und Punktabstand von der gewünschten Approximationsgenauigkeit abhängt, ist die Berechnung der Funktionswerte für jeden beliebigen Punkt innerhalb der Fläche möglich.

Dem gegenüber ist die Kollokation ein Verfahren, das lediglich eine punktweise Prädiction ermöglicht. Selbstverständlich lassen sich ebenfalls beliebige Punkte

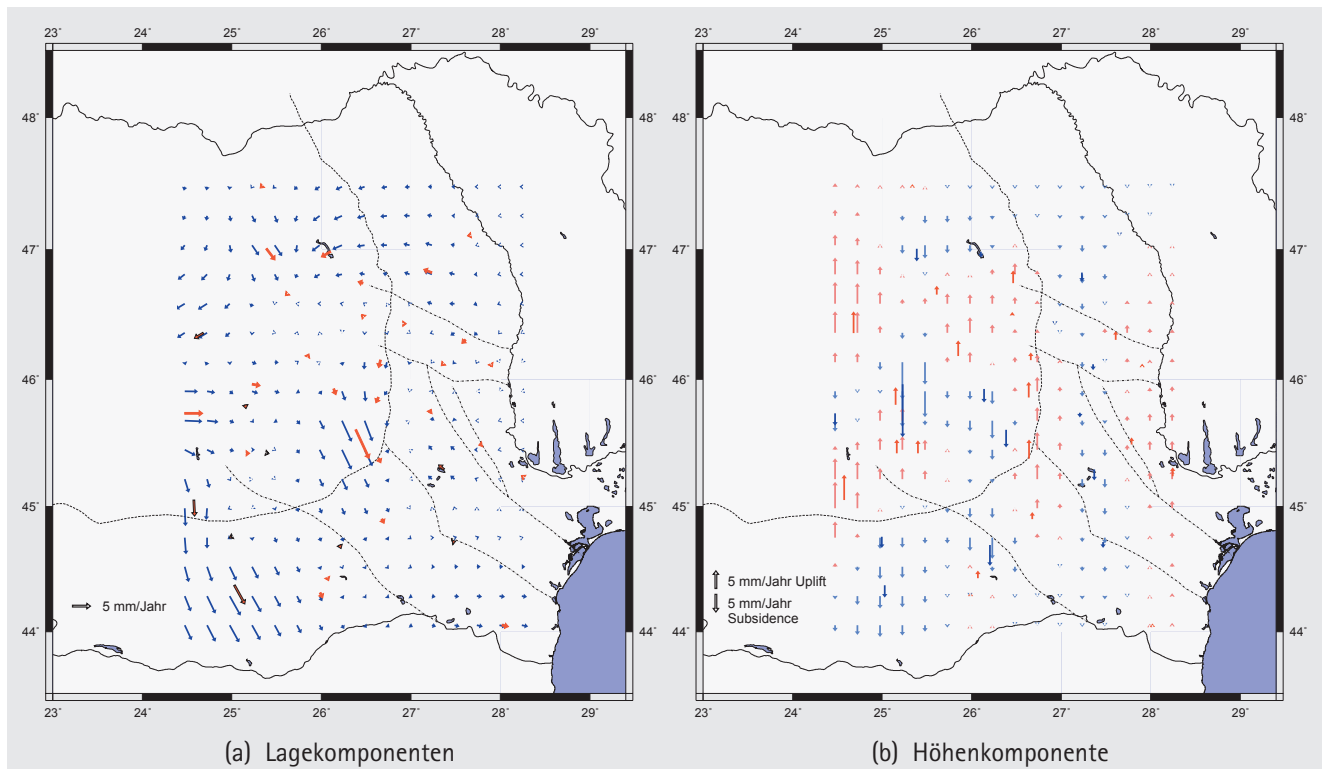


Abb. 7: MBA-generiertes Geschwindigkeitsfeld mit Station LUPS

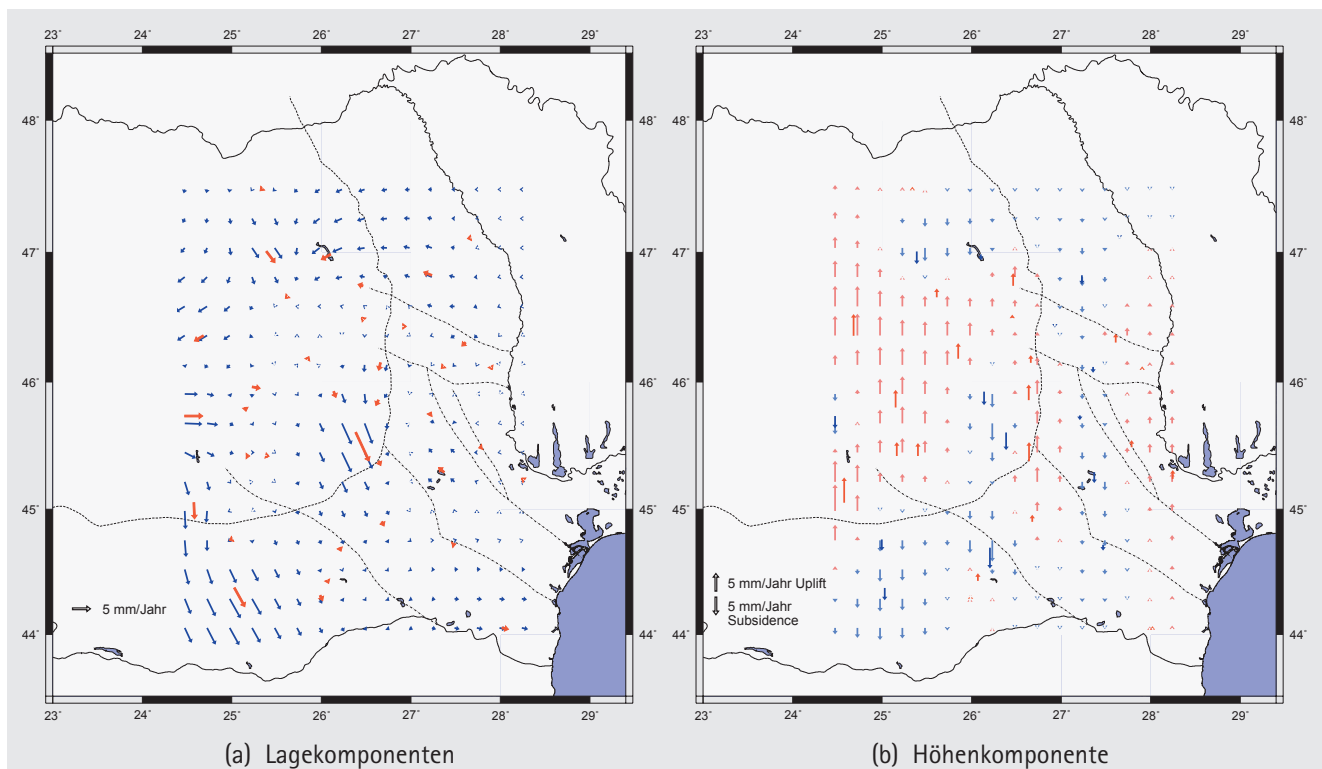


Abb. 8: MBA-generiertes Geschwindigkeitsfeld ohne Station LUPS

berechnen, dabei sind jedoch jedes Mal Kovarianzvektoren zwischen dem jeweiligen Punkt und sämtlichen Datenpunkten aufzustellen und mit der inversen Kovarianzmatrix zu multiplizieren. Das führt beispielsweise bei 1225 Punkten (das entspricht  $35 \times 35$  Gitterpunkten in Tab. 1) zu einer Rechenzeit von ca. 9 Sekunden, was un-

gefähr der 10fachen Rechenzeit des MBA-Algorithmus entspricht.

Zudem weist die Kollokation die oben genannten Nachteile auf, dass die Korrelationsfunktion empirisch zu bestimmen ist und die prädizierten Werte größer als die Originalwerte werden können.

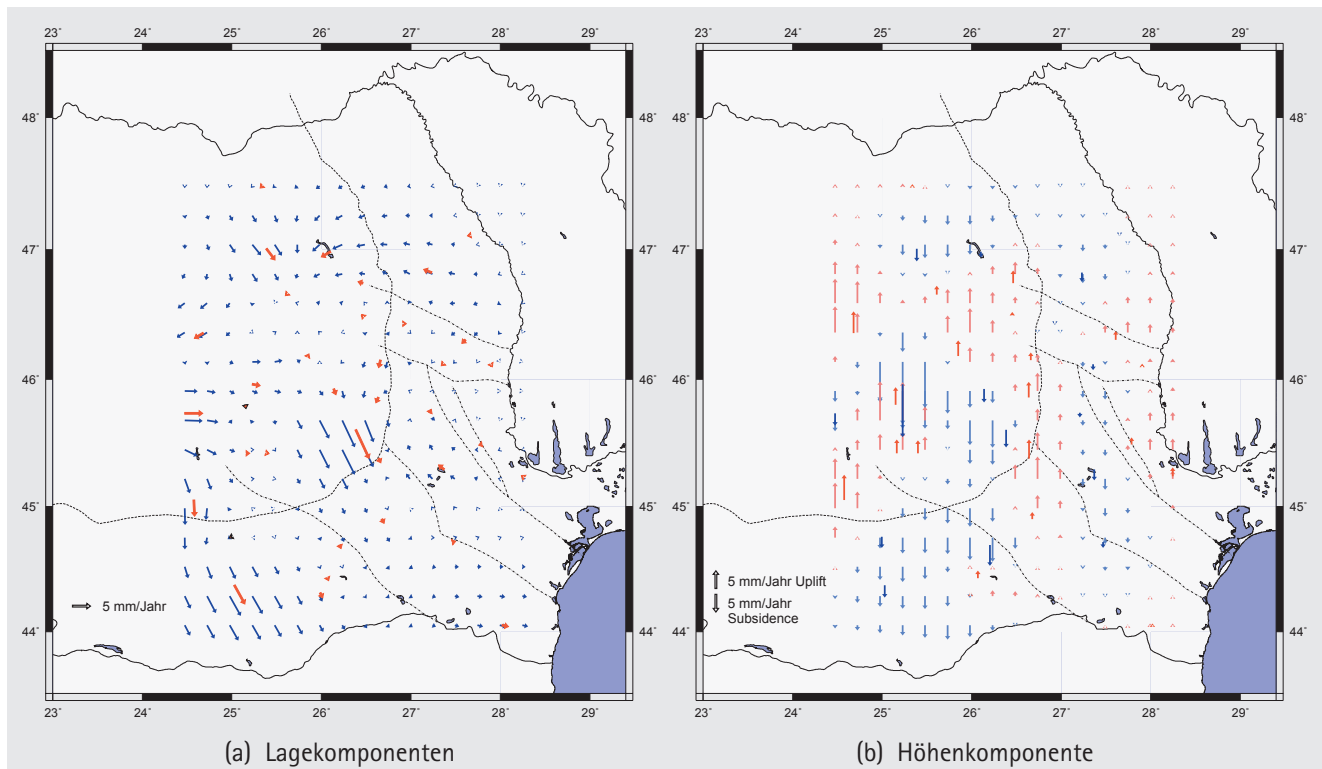


Abb. 9: Geschwindigkeitsfeld aus der Kollokation, mit Station LUPS

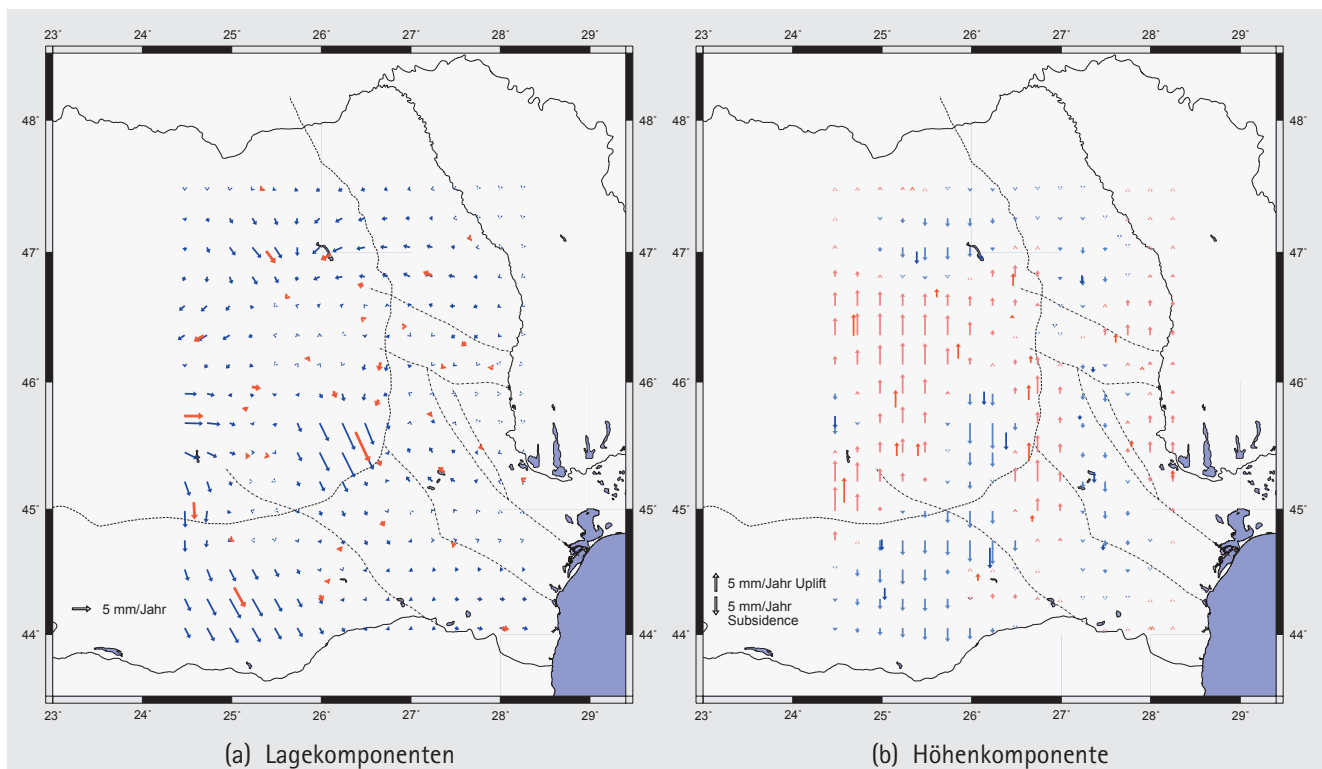


Abb. 10: Geschwindigkeitsfeld aus der Kollokation, ohne Station LUPS

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Das Verfahren der *Multilevel B-Spline Approximation* bietet eine sehr gute Alternative zur Kollokation für die Ableitung von Geschwindigkeitsfeldern aus GPS-Messungen. Als Verfahren zur Generierung von Freiform-

flächen ist es sehr gut geeignet, eine lokal bestangepasste, analytische Approximationsfläche zu erzeugen. Durch die hierarchischen B-Spline-Flächen, bei denen sich die Anzahl der Kontrollpunkte jeweils verdoppelt, wird die bestmögliche lokale Approximation erreicht. Ausreißer wirken sich im Gegensatz zur Kollokation nur sehr lokal



aus. Ebenso ist es nicht notwendig, eine geeignete Korrelationsfunktion festzulegen.

Die Verwendung des MBA-Verfahrens ist nicht beschränkt auf die Generierung von Geschwindigkeitsfeldern, sie wird im Rahmen der Arbeiten im Sonderforschungsbereich 461 um eine Komponente zur Deformationsanalyse (Ableitung von Haupt- und Scherdehnungen sowie Spannungen) erweitert werden. Des Weiteren wird die Varianzfortpflanzung mit voll besetzter Varianz-Kovarianz-Matrix zur Beurteilung der Genauigkeit der Ergebnisse implementiert.

## Literatur

- Buhmann, M.D.: Radial Basis Functions, Acta Numerica, S. 1–38, 2000.
- Grimm-Pitzinger, A., Rudig, S.: Freiformflächen zur Modellierung von Deformationsmessungen, zfv 130, Heft 3, S. 193–199, 2005.
- Hjelle, Ø.: Approximation of Scattered Data with Multilevel B-Splines, Technical Report STF42 A01011, SINTEF Applied Mathematics, Oslo, 2001.
- Hoschek, J., Lasser, D.: Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung, B.G. Teubner Stuttgart, 1992.
- Lee, S., Wolberg, G., Shin, S. Y.: Scattered Data Interpolation with Multilevel B-Splines, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, Vol. 3, Nr. 3, S. 229–244, 1997.
- Legrand, J., Altamimi, Z., Jamet, O.: Interpolating the ITRF velocity field using least squares collocation method, Geophysical Research Abstracts, Vol. 8, 10187, 2006.
- Perovic, G.: Least Squares, University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering, Belgrad, 2005.
- Peter, Y.: Present-day Crustal Dynamics in the Adriatic-Aegean Plate Boundary Zone inferred from continuous GPS-Measurements, Diss., Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 2001.
- Straub, C.: Recent Crustal Deformation and Strain Accumulation in the Marmara Sea Region, N.W. Anatolia, inferred from GPS Measurements, Diss., Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1996.
- Wälder, O.: Oberflächendeformationsanalyse mithilfe von Bezier-Splines: Fallstudie Blockgletscher Reichenkar (Tirol), Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation, Heft 4, S. 166–172, 2005.
- Weis, M.P., Lewis, R.R.: BSPLND, A B-Spline N-Dimensional Package for Scattered Data Interpolation, Presentation at the Twelfth Western Computer Graphics Symposium, Sun Peaks, British Columbia, March 25–28, 2001.
- Wendland, H.: Scattered Data Approximation, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 2005.

## Anschrift des Autors

Dipl.-Ing. Andre Nuckelt  
Universität Karlsruhe (TH)  
Geodätisches Institut  
Englerstraße 7  
76131 Karlsruhe  
nuckelt@gik.uni-karlsruhe.de